Kalkulus 2, 11. hét

Integrálások sorrendjének felcserélése

I. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét az integrálás sorrendjének a felcserélésével!

1. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^{\frac{2}{3}}}^1 y\cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$
2. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x,$
3. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 ye^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$
4. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 y\sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

II. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ folytonos, korlátos függvény. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét!

1. $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$
2. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x + \int_2^4 \int_0^{4-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$
3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x + \int_{\sqrt{2}}^4 \int_0^2 f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$

Területszámítás és kettős integrál

I. Területszámítás.

1. Legyen $c\in\mathbb{R}^+$. Mekkora az $xy=1$, $xy=4$, $y=x^2$ és az $y=cx^2$ görbék által meghatározott korlátos tartomány területe?
2. Legyen $R\in\mathbb{R}^+$, $d\in[0,2R]$. Mekkora a $T=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x^2+y^2\le R^2,\ (x-d)^2+y^2\le R^2\big\}$ tartomány területe?
3. Legyen $a,b\in\mathbb{R}^+$. Mekkora a $T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$ tartomány területe?
4. Mekkora a $T=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x^2+y^2\le 1,\ x^2\le y\big\}$ tartomány területe?

II. Kettős integrál.

Adott $T\subseteq\mathbb{R}^2$ halmaz és $f:T\to\mathbb{R}$ folytonos függvény esetén számoljuk ki a $\displaystyle\iint_T f$ integrált!

1. Legyen $T=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid (x-1)^2+y^2\ge 1,\ (x-2)^2+y^2\le 4\big\}$ és $f(x,y)=xy$.
2. Legyen $a\in\mathbb{R}^+$ és $T=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid \exists t\in[0,2\pi]: x=a(t-\sin t),\ 0\le y\le a(1-\cos t)\big\}$, valamint $f(x,y)=y^2$.
3. A T halmaz a (0,0), (3,0), (2,1) és (1,1) pontok által meghatározott trapéz és $f(x,y)=3x-y^2$.
4. A T halmaz az $x=2$, $y=x$ és az $y=\dfrac{1}{x}$ görbék által határolt korlátos tartomány és $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y^2}$.

5. Legyen $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1/2\right\}$ és $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.
6. Legyen $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0\right\}$ és $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.
7. Legyen $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ 0 \le x,\ 0 \le y\right\}$ és $f(x,y) = x^2y$.
8. Legyen $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le 4x^2+y^2 \le 9,\ 0 \le x\right\}$ és $f(x,y) = \dfrac{2x+y}{4x^2+y^2}$.
9. Legyen $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 9x^2 + \dfrac{y^2}{4} \le 1,\ x \ge 0\right\}$ és $f(x,y) = \dfrac{1}{1+\sqrt{9x^2+\frac{y^2}{4}}}$.

Potenciálszámítás

I. Potenciálszámítás.
Az alábbi $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormezőknek létezik-e (skalár)potenciálja az adott V tartományban, és ha igen, határozzuk meg a potenciált.

1. $v(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}\right) \qquad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z > 0\right\}$
2. $v(r) = \dfrac{r}{\|r\|^2} \qquad V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
3. $v(x,y,z) = (y,x,0) \qquad V = \mathbb{R}^3$
4. $v(x,y,z) = \left(\dfrac{y}{x^2}, \dfrac{-1}{x}, 0\right) \qquad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \ne 0\right\}$
5. $v(x,y,z) = \left(\dfrac{-y}{(x-y)^2}, \dfrac{x}{(x-y)^2}, 0\right) \qquad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < y\right\}$
6. $v(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y) \qquad V = \mathbb{R}^3$
7. $v(x,y,z) = \left(\dfrac{\operatorname{ch} z^2}{x}, \dfrac{\operatorname{ch} z^2}{y}, 2z\ln(xy)\cdot \operatorname{sh} z^2\right) \qquad V = \mathbb{R}^3$
8. $v(x,y,z) = \left(2x\,\mathrm{e}^{yz} - z\sin(xz), zx^2\,\mathrm{e}^{yz} + y, yx^2\,\mathrm{e}^{yz} - x\cos(xz)\right) \qquad V = \mathbb{R}^3$
9. $v(x,y,z) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, 0\right) \qquad V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

Gauss–Osztrogradszkij-tétel és Stokes-tétel

I. Az ismert integráltételek segítségével oldjuk meg az alábbi feladatokat.

1. Legyen F a $z = 4 - x^2 - y^2$ felület $z \ge 0$ része, és az n normális vektorára teljesüljön az $\langle n, (0,0,1)\rangle \ge 0$ egyenlet. Továbbá legyen

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto (xz^2, zy^2, yx^2)$$

Határozzuk meg az $\displaystyle\iint\limits_F \operatorname{rot} v \,\mathrm{d}F$ integrál értékét.

2. Számoljuk ki a
$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$$
vektormező fluxusát a $9z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$ egyenletek által meghatározott kúpfelületen, ha a felület normálisát kifele irányítjuk.
3. Legyen
$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \mapsto (x, y, -2z),$$
és legyen F az $y = x^2 + 4z^2$ paraboloid $0 \le y \le 4$ része $\langle n, (0, 1, 0)\rangle\rangle \ge 0$ irányítással, ahol n a felület normálvektora. Határozzuk meg az $\displaystyle\iint\limits_F v \,\mathrm{d}F$ integrál értékét.
4. Legyen $v(x, y, z) = \left(x + \mathrm{e}^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, 0\right)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z \ge 0$ része. Határozzuk meg az $\displaystyle\iint\limits_F v \,\mathrm{d}F$ integrál értékét.
5. Legyen $v(x, y, z) = \left(x + \mathrm{e}^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, z\right)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z > 0$ része. Határozzuk meg az $\displaystyle\iint\limits_F v \,\mathrm{d}F$ integrál értékét.

II. Keressük meg a hibát az alábbi gondolatmenetekben.
1. Legyen v egy nyugvó ponttöltés elektromos tere, vagyis
$$v : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \qquad r \mapsto \frac{r}{\|r\|^3}.$$
Mivel $\operatorname{div} v = 0$ ezért az R sugarú nulla középpontú gömbre integrálva a $\operatorname{div} v$ függvényt nullát kapunk. Az R sugarú gömbhéjra vett integrálja a v vektormezőnek viszont 4π. Azonban $0 \ne 4\pi$!
2. Legyen v egy egyenárammal átjárt végtelen hosszú egyenes vezető mágneses tere, vagyis
$$v : \mathbb{R}^3 \setminus ((0, 0) \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3 \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}(-x_2, x_1, 0).$$
Ekkor $\operatorname{rot} v = 0$, vagyis az $x_3 = 0$ síkban a nulla középpontú R sugarú körlapra integrálva a $\operatorname{rot} v$ függvényt nullát kapunk. Az előbbi kör határán vett integrálja a v vektormezőnek viszont 2π. Azonban $0 \ne 2\pi$!

III. Green-formulák.
Legyen $V \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt, reguláris határú halmaz és $u_1, u_2 \in C^2(V, \mathbb{R})$. Ekkor
$$\iiint\limits_V u_1 \Delta u_2 + \langle \operatorname{grad} u_1, \operatorname{grad} u_2\rangle \,\mathrm{d}\mu_V = \iint\limits_{\partial V} u_1 \operatorname{grad} u_2 \,\mathrm{d}\mu_{\partial V}$$
$$\iiint\limits_V u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1 \,\mathrm{d}\mu_V = \iint\limits_{\partial V} u_1 \operatorname{grad} u_2 - u_2 \operatorname{grad} u_1 \,\mathrm{d}\mu_{\partial V}$$
teljesül, amit aszimmetrikus, illetve szimmetrikus Green-formulának nevezünk.
Számoljuk ki a Green-formulák jobb illetve bal oldalán álló mennyiségeket az alábbi esetekben.
1. Legyen V az origó körüli R sugarú gömb, $u_1(r) = \|r\|^2$ és $u_2(r) = \ln \|r\|$.
2. Legyen V az origó körüli R sugarú gömb, $u_1(r) = \langle a, r\rangle^2$, ahol $a \in \mathbb{R}^3$, és $u_2(r) = \ln \|r\|$.