Kalkulus 2, 10. hét

Ívhosszszámítás és vonalmenti integrál

I. Ívhosszszámítás.

1. Mekkora a $\Gamma = \left\{(3\cos t, 2t, 3\sin t) \in \mathbb{R}^3 |\ t \in [0, 2\pi]\right\}$ görbe ívhossza?
2. Mekkora a $\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in [1, 9]\,,\ y = x^{\frac{3}{2}}\right\}$ görbe ívhossza?
3. Mekkor az $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $r(\varphi) = \varphi$ esetén az $(r(\varphi), \varphi)$ polárkoordinátákkal adott görbe ívhossza, ha $\varphi \in [0, 2\pi]$?

II. Vonalmenti integrál.
Határozzuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvény $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ görbe menti integrálját, ahol

1. $f(x, y, z) = (y^2 - x^2, 2yz, -x^2)$, $I = [0, \pi]$ és $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$;
2. $f(x, y, z) = (y + z^2, x + z, x + y)$ és γ az $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$ háromszög oldala az $A \to B \to C \to A$ bejárással;
3. $f(x, y, z) = \left(2xy^2, 2x^2y, -2x^2y^2\right)$ és γ_1 az $x^2 + z^2 = 1$ és az $y = 2$ felületek metszésvonala, valamint γ_2 az $x^2 + y^2 = 1$ és $z = 1$ felületek metszésvonala;
4. $f(x, y, z) = (2yz + x^2, 2xz + y^2, 2xy + z^2)$ és γ tetszőleges folytonosan differenciálható görbe a $(2, 1, 3)$ és a $(-1, 3, -2)$ pontok között;
5. $f(x, y, z) = (xy, y^2, xz)$, $I = [0, 1]$ és $\gamma(t) = (t, t^2 + 1, \exp(t))$;
6. $f(x, y, z) = (xy, y, 0)$, $I = [0, \pi]$ és $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)$ (ciklois);
7. $f(x, y, z) = (-y, x, 0)$ és γ_1 az $A = (0, 1, 0)$ és a $B = (1, 0, 0)$ pontokat összekötő egyenesvonal, valamint γ_2 a $z = 0$ síkban lévő origó középpontú kör negyedíve az $A = (0, 1)$ és a $B = (1, 0)$ pontok között.

Felszínszámítás és felületi integrál

I. Felszínszámítás.
Határozzuk meg az alábbi felületek felszínét.

1. Az origó középpontú $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömb.
2. Csavarfelület, melynek paraméterezése
$$P : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, u + v).$$
3. Tórusz, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \le a$ és a paraméterezés
$$P : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (\vartheta, \varphi) \mapsto ((a + b\cos\varphi)\cos\vartheta, (a + b\cos\varphi)\sin\vartheta, b\sin\varphi).$$
4. Ellipszis, melynek féltengelyei a, a, b $(a, b \in \mathbb{R}^+)$.

II. Felületi integrál.
Határozzuk meg az adott függvények integrálját a megadott F felületeken.

1. Legyen $f(x, y, z) = xyz$ és F az a felület, melynek paraméterezése
$$P : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto (u\cos v, u\sin v, u^2).$$

2. Legyen $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(r) = r$ és F az $(1, 0, 0)$ középpontú 1 sugarú gömbhéj $z \geq 0$ része, valamint a felület n normálvektorára $\langle n, (0, 0, 1)\rangle \geq 0$ teljesüljön.
3. Legyen $v(r) = \|r\|^3 \cdot (r \times (0, 0, 1))$ és F a $z = 0$ sík $x^2 + y^2 \leq 1$ része, valamint a felület n normálvektorára $\langle n, (0, 0, 1)\rangle \geq 0$ teljesüljön.
4. Legyen $v(x, y, z) = (x, 3x, -2z)$, továbbá F legyen az $(1, 2, 3)$ csúcspontú és a $z = 1$ síkban az $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ vezérgörbéjű kúp palástjának a $z = 1$ és a $z = 3$ síkok közötti része, valamint a felület n normálvektorára $\langle n, (0, 0, 1)\rangle \geq 0$ teljesüljön.
5. Legyen $v(x, y, z) = (x, y, z)$, és legyen F az

$$r : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto (\cos v(3 + \cos u), \sin v(3 + \cos u), \sin u)$$

paraméterezésű tóruszdarab befele vett irányítással (vagyis mutasson az n normálvektor a felület által körülzárt korlátos térrész felé).

Térfogatszámítás és hármas integrál

I. Térfogatszámítás.
Határozzuk meg az alábbi $V \subseteq \mathbb{R}^3$ halmazok térfogatát!

1. Legyen V az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű hengernek a $z = 0$ és az $z = 2 - x - y$ egyenletű síkok közé eső része.
2. Legyen V az a gömbhéjcikk, melyet a gömbi koordinátákkal adott $r = 1$ és $r = 2$ sugarú gömbök és a $\vartheta = \pi/4$ és a $\vartheta = \pi/3$ kúpok határolnak.
3. Legyen V a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ felületek közé eső rész.
4. Legyen V a $z = x^2 + y^2$ paraboloid, a $z = 0$ sík és az $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ henger határolt korlátos térrész.
5. Legyen V a $z = 0$, $z = 2y^2 + 8x$, $y = 1 - 2x$, $y = x$ és az $x = 0$ felületekkel határolt korlátos tartomány.
6. Legyen V az $R \in \mathbb{R}^+$ középsugarú és $r \in]0, R[$ gyűrűsugarú tórusz.
7. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2\right\}$.
8. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ (x - R)^2 + y^2 + z^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2\right\}$.
9. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 \leq R^2,\ y^2 + z^2 \leq R^2\right\}$.
10. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 \leq R^2,\ y^2 + z^2 \leq R^2,\ x^2 + z^2 \leq R^2\right\}$.
11. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xy - 4yz \leq R^2\right\}$.

II. Hármas integrál.
Adott $T \subseteq \mathbb{R}^3$ halmaz és $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén számoljuk ki a $\iiint_T f$ integrált!

1. Legyen T a $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ és a $z = 0$ egyenletek által meghatározott korlátos tartomány, és $f(x, y, z) = xy^2z^3$.
2. Legyen T a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 1$ felületekkel határolt korlátos tartomány és $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Legyen T a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ és az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z) = xyz$.
4. Legyen T a $z \geq 2$ és a $z \leq 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z) = 2z$.
5. Legyen T a $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ és a $2z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z) = xy^2z^3$.
6. Legyen T a $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ és a $3z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x,y,z) = x^2z$.
7. Adott $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ paraméterek esetén legyen $T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ és
$$f(x,y,z) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$
8. Legyen $T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 6xy - 4yz - 4xz \leq 1 \right\}$ és $f(x,y,z) = 1$.