Kalkulus 2, 8. hét

Inverzfüggvény-tétel

I$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $E_1 = \mathbb{R}^3$ és $E_2 = \mathbb{R}^2$. Határozzuk meg az

$$f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \big((x,y,z),(u,v)\big) \mapsto \left(\frac{x^2}{1+u^2+\mathrm{e}^y}, vz^2\right)$$

függvény parciális deriváltjait az $a = \big((1,-1,0),(1,3)\big)$ pontban.

II$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^3$.

1. Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható.
2. Legyen $g = f^{-1}$. Igazoljuk, hogy $g'(0) = 1$ és $g'(10) = \dfrac{1}{13}$.

III$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (u,v) \mapsto (u^3 + uv + v^3, u^2 - v^2).$$

1. Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható az $(1,1)$ pont egy U környezetében.
2. Legyen $g = (f|_U)^{-1}$. Határozzuk meg a $(\mathrm{D}\, g)(3,0)$ lineáris leképezést.

IV$^{\mathrm{A}}$. Legyen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto (x^3y + xz^2, x^3 + x^2 - yz, x^2 + z^2 - xyz).$$

1. Mutassuk meg, hogy az f függvény invertálható az $(1,1,1)$ pont egy U környezetében.
2. Legyen $g = (f|_U)^{-1}$. Határozzuk meg a $(\mathrm{D}\, g)(2,1,1)$ lineáris leképezést.

Implicitfüggvény-tétel

I$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk hogy az $y^2x + y^3 = 1$ egyenlet egy $y(x)$ függvénykapcsolatot határoz meg az $x_0 = 0$ pont egy környezetében! Számoljuk ki $y'(0)$ értékét!

II$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy az

$$x \cos y^2 + \frac{2y}{x+2} + y = 2x$$

egyenletnek létezik olyan $x \mapsto y(x)$ implicit függvénye, mely áthalad a $(0,0)$ ponton, valamint írjuk fel ennek az $x \mapsto y(x)$ függvénynek a $(0,0)$ pontbeli érintőegyenesének az egyenletét!

III$^{\mathrm{A}}$. Igazoljuk, hogy az

$$y + x^2 \sin y + \sin x = 1$$

egyenletnek létezik olyan $x \mapsto y(x)$ implicit függvénye, mely áthalad a $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ponton. Milyen lokális tulajdonsága van az implicit módon adott $x \mapsto y(x)$ függvénynek a $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pontban?

IV$^{\mathrm{A}}$. Igazoljuk hogy az $xy - 2\,\mathrm{e}^{x-y} - 2z + \mathrm{e}^z = 0$ egyenlet egy $z(x,y)$ függvénykapcsolatot határoz meg az $(1,1)$ pont egy környezetében! Számoljuk ki $z'_x(1,1)$ és $z'_y(1,1)$ értékét!

V^{Gy} . Tekintsük az

$$x^2u + yz^2v + v^3 = 4$$
$$x^4y^2uv = 4$$

egyenletrendszert. Legyen $a = (1, 2, -1)$ és $b = (1, 1)$. (Ekkor az $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -1$, $u_0 = 1$ és $v_0 = 1$ számokra teljesül a fenti egyenletrendszer.) Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ nyílt környezete az a pontnak és olyan $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ függvény, melyre $\varphi(a) = b$ és minden $(x, y, z) \in \Omega$ esetén az $u = \varphi_1(x, y, z)$ és a $v = \varphi_2(x, y, z)$ számokra teljesül a fenti egyenletrendszer. Igazoljuk továbbá, hogy

$$(\mathrm{D}\,\varphi)(a) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

teljesül.

VI^{H} . Termodinamikában állapotegyenletnek nevezzük valamely anyag nyomása p, térfogata V és hőmérséklete között fennálló $f(p, V, T) =$ áll összefüggést. Tegyük fel, hogy állapotegyenletet leíró $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, és legyen $a = (p_0, V_0, T_0) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ olyan pont, melyre $(\partial_p f)(a), (\partial_V f)(a), (\partial_T f)(a) \neq 0$.

1. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz, hogy minden $v \in U$ elemre $(\partial_p f)(v), (\partial_V f)(v), (\partial_T f)(v) \neq 0$.
2. Mutassuk meg, hogy létezik olyan

$$\begin{aligned} p &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & (V, T) &\mapsto p(V, T) \\ V &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & (p, T) &\mapsto V(p, T) \\ T &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & (p, V) &\mapsto T(p, V) \end{aligned}$$

függvény, hogy

$$\begin{aligned} &(V_0, T_0) \in \operatorname{Dom} p, & p(V_0, T_0) &= p_0, & &\forall (V, T) \in \operatorname{Dom} p : \ f(p(V, T), V, T) = f(a) \\ &(p_0, T_0) \in \operatorname{Dom} V, & V(p_0, T_0) &= V_0, & &\forall (p, T) \in \operatorname{Dom} V : \ f(p, V(p, T), T) = f(a) \\ &(p_0, V_0) \in \operatorname{Dom} T, & T(p_0, V_0) &= T_0, & &\forall (p, V) \in \operatorname{Dom} T : \ f(p, V, T(p, V)) = f(a) \end{aligned}$$

teljesül.
3. Igazoljuk, hogy az előző pontban szereplő függvényekre

$$\left.\frac{\partial p(V, T)}{\partial V}\right|_{(V,T)=(V_0,T_0)} \cdot \left.\frac{\partial V(p, T)}{\partial T}\right|_{(p,T)=(p_0,T_0)} \cdot \left.\frac{\partial T(p, V)}{\partial p}\right|_{(p,V)=(p_0,V_0)} = -1$$

$$\left.\frac{\partial p(V, T)}{\partial T}\right|_{(V,T)=(V_0,T_0)} \cdot \left.\frac{\partial V(p, T)}{\partial p}\right|_{(p,T)=(p_0,T_0)} \cdot \left.\frac{\partial T(p, V)}{\partial V}\right|_{(p,V)=(p_0,V_0)} = -1$$

teljesül.

Az alábbi függvények példák állapotegyenletekre.

$$\begin{aligned} f(p, V, T) &= \frac{pV}{T}, & & & &(\textit{ideális gáz}) \\ f(p, V, T) &= \left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot \frac{V - b}{T}, & &a, b \in \mathbb{R}^+ & &(\textit{Van der Waals-egyenlet}) \\ f(p, V, T) &= \frac{p(V - nb)}{T} \cdot \exp\left(\frac{an}{RTV}\right), & &a, b, n, R \in \mathbb{R}^+ & &(\textit{Dieterici-egyenlet}) \end{aligned}$$