Kalkulus 2, 7. hét

Differenciálható függvények

I^{Gy} . Differenciálhatók-e az alábbi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények a $(0,0)$ pontban?

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0. \end{cases}$
3. $f(x,y) \begin{cases} \dfrac{(x+3)y^2}{x^2+2y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 1, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$
4. $f(x,y) = \sqrt{2x^2+3y^2}$

Gradiens, divergencia és rotáció

I^{Gy} . Vizsgáljuk az $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 3y + \mathrm{e}^{xy^2} - 2y \operatorname{arctg} \frac{x}{y^2+1} \qquad g(x,y) = (3x^2+1)^{2y^3}$$

függvényeket az $a = (0,1)$ pontban.

1. Számoljuk ki az $\big((\mathrm{D}\, f)(a)\big)(x,y)$ és a $\big((\mathrm{D}\, g)(a)\big)(x,y)$ értéket!
2. Adjuk meg a $(\operatorname{grad} f)(a)$ és a $(\operatorname{grad} g)(a)$ vektort.
3. Legyen $e \in \mathbb{R}^2$ olyan egységvektor, mely párhuzamos a $(2,-7)$ vektorral. Számoljuk ki az f és g függvény e iránymenti deriváltját az a pontban.

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. Határozzuk meg, hogy mely irányhoz tartozik az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény legnagyobb iránymenti deriváltja a $a \in \mathbb{R}^2$ pontban, ha

1. $f(x,y) = \dfrac{y^3}{\mathrm{e}^{2x+1}}$ és $a = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$;
2. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ és $a = (1,1)$.

$\mathrm{III}^{\mathrm{A}}$. Legyen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 x_2^2 x_3^3.$$

1. Számoljuk ki az f függvény gradiensét az $a = (3,2,1) \in \mathbb{R}^3$ pontban.
2. Adjuk meg a $\operatorname{grad} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvényt.
3. Számoljuk ki az Δf függvényt.

IV^{A} . Igazoljuk, hogy az

$$u : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R} \qquad (x,y,z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

függvényre $\Delta u = 0$ teljesül!

V^{Gy} . Számoljuk ki az alábbi mennyiségeket, ahol r az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ identitásfüggvény, $\|\cdot\|$ az euklidészi norma az $\mathbb{R}^3$ téren és $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. $\operatorname{grad} \log \|r\|^3$	2. $\operatorname{grad} \|r\|^5$	3. $\operatorname{grad} f(\|r\|)$
4. $\operatorname{div}(\|r\| \cdot \operatorname{grad} \log \|r\|^3)$	5. $\operatorname{div} \operatorname{grad} \|r\|^5$	6. $\operatorname{div} \operatorname{grad} f(\|r\|)$

VI^{A} . Igazoljuk az alábbi azonosságokat!

1. Ha $U_1, U_2 \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ akkor

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(U_1+U_2) &= \operatorname{grad} U_1 + \operatorname{grad} U_2 \\ \operatorname{grad}(cU_1) &= c \operatorname{grad} U_1 \\ \operatorname{grad}(U_1U_2) &= U_1 \operatorname{grad} U_2 + U_2 \operatorname{grad} U_1. \end{aligned}$$

2. Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $V_1, V_2 \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ és $c \in \mathbb{R}$ akkor

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V_1+V_2) &= \operatorname{div} V_1 + \operatorname{div} V_2 \\ \operatorname{div}(cV_1) &= c \operatorname{div} V_1 \\ \operatorname{div}(UV_1) &= U \operatorname{div} V_1 + \langle V_1, \operatorname{grad} U \rangle . \end{aligned}$$

3. Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $V_1, V_2 \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ és $c \in \mathbb{R}$ akkor

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(V_1+V_2) &= \operatorname{rot} V_1 + \operatorname{rot} V_2 \\ \operatorname{rot}(cV_1) &= c \operatorname{rot} V_1 \\ \operatorname{rot}(UV_1) &= U \operatorname{rot} V_1 + (\operatorname{grad} U) \times V_1. \end{aligned}$$

$\mathrm{VII}^{\mathrm{A}}$. Legyen $U \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $V \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{div} \operatorname{rot} V = 0$ és $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$.

$\mathrm{VIII}^{\mathrm{A}}$. Legyen $V \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, a $V = (V_1, V_2, V_3)$ komponensekkel és legyen $\Delta V = (\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3)$. Mutassuk meg, hogy

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} V = \operatorname{grad} \operatorname{div} V - \Delta V$$

teljesül.

Láncszabály

I^{Gy} . Legyen $f(t) = \left(t^2 - t, \dfrac{1}{1+t^2}, \mathrm{e}^t\right)$, $g(x,y,z) = x^2y - z$ és $t_0 = 1$. Határozzuk meg a $g \circ f$ és a $f \circ g$ függvény deriváltját a t_0 pontban a közvetett függvény deriválási szabálya alapján, valamint közvetlen számolással.

II$^{\mathrm{A}}$. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\, f(x(t), y(t), z(t))}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}\, t} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}\, y(t)}{\mathrm{d}\, t} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}\, z(t)}{\mathrm{d}\, t}$$

teljesül.

III$^{\mathrm{A}}$. Laplace-operátor polárkoordinátákkal.
Legyen $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 |\ x \le 0\}$ és $H = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$, valamint a polárkoordinátázás legyen $P : H \to G$, $P(r, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$.

1. Igazoljuk, hogy P differenciálható.
2. Mutassuk meg, hogy $Q : G \to H$, $Q(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, (\operatorname{sgn} y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ a P inverze, valamint, hogy Q differenciálható.
3. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f \circ Q)(x,y)}{\partial x} &= \cos\varphi \frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial (f \circ Q)(x,y)}{\partial y} &= \sin\varphi \frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

4. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor

$$(\Delta f)(r, \varphi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] f(r, \phi).$$

IV$^{\mathrm{A}}$. Laplace-operátor gömbi koordinátákkal.
Legyen $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \le 0\}$ és $H = \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$, valamint a gömbi koordinátázás legyen $P : H \to G$, $P(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta)$.

1. Igazoljuk, hogy P differenciálható.
2. Mutassuk meg, hogy $Q : G \to H$,

$$Q(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, (\operatorname{sgn} y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

   a P inverze, valamint, hogy Q differenciálható.
3. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f \circ Q)(x,y,z)}{\partial x} &= \sin\vartheta \cos\varphi \frac{\partial f(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta \cos\varphi}{r} \frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\sin\varphi}{r \sin\vartheta} \frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial (f \circ Q)(x,y,z)}{\partial y} &= \sin\vartheta \sin\varphi \frac{\partial f(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta \sin\varphi}{r} \frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial \vartheta} + \frac{\cos\varphi}{r \sin\vartheta} \frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial (f \circ Q)(x,y,z)}{\partial z} &= \cos\vartheta \frac{\partial f(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r} \frac{\partial f(r,\varphi,\varphi)}{\partial \vartheta}. \end{aligned}$$

4. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C^2(H, \mathbb{R})$, akkor

$$(\Delta f)(r, \vartheta, \varphi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] f(r, \vartheta, \varphi).$$

V$^{\mathrm{A}}$. Mutassuk meg, hogy a Laplace-egyenlet invariáns az inverzióra. Legyen $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \mathbb{R})$, amit gömbi koordinátarendszerben $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ alakban írunk fel. Igazoljuk, hogy ha $\Delta\Phi = 0$, akkor a $\Psi(r, \vartheta, \varphi) = \dfrac{R}{r}\Phi\left(\dfrac{R^2}{r}, \vartheta, \varphi\right)$ függvényre is teljesül a $\Delta\Psi = 0$ egyenlet, tetszőleges $R \in \mathbb{R}^+$ paraméter mellett.