Kalkulus 2, 6. hét

Parciális és iránymenti deriváltak

I$^{\mathrm{Gy}}$. Tekintsük az alábbi függvényt.

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. Mutassuk meg, hogy f nem folytonos a nullában.
2. Határozzuk meg az f függvény parciális deriváltjait minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban.

II$^{\mathrm{Gy}}$. Tekintsük az alábbi függvényt.

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{ha} \quad (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. Határozzuk meg az f függvény parciális deriváltjait minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban.
2. Mutassuk meg, hogy a parciális deriváltak nem folytonosak a $(0,0)$ pontban.
3. Igazoljuk, hogy az f függvény differenciálható a $(0,0)$ pontban.

III$^{\mathrm{Gy}}$. Mutassuk meg, hogy az

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad y=x^2\neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad y\neq x^2 \ \vee\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

függvénynek minden iránymenti deriváltja létezik a $(0,0)$ pontban, de a függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

IV$^{\mathrm{A}}$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto \sqrt{|xy|}$$

függvény folytonos, léteznek a parciális deriváltjai, de az f függvény nem differenciálható a $(0,0)$ pontban.

V$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

1. $x\dfrac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}(xy)=y\dfrac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}(xy)$
2. $\dfrac{\partial^{i+k}}{\partial x^i\partial y^k}(xy\,\mathrm{e}^{x+y})=(i+x)(k+y)\,\mathrm{e}^{x+y}, \quad i,k\in\mathbb{N}$
3. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)((\sin x)(\sin y))=0$
4. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4y}}\right)=0$

VI$^{\mathrm{A}}$. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olyan differenciálható függvény, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\|f(x)\| = 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor minden $x \in \mathbb{R}$ elemre $\langle (\mathrm{D}\, f)(x), f(x) \rangle = 0$.

Érintősík

I$^{\mathrm{Gy}}$. Írjuk fel az $xyz = 1$ felület $x + y + z = 6$ síkkal párhuzamos érintősíkjainak az egyenletét.

I$^{\mathrm{A}}$. Tekintsük az $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 < x, y, z\right\}$ térrészben (amelynek neve *pozitív ortáns*) a

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

felületet, ahol $a \in \mathbb{R}^+$. Mutassuk meg, hogy a felület érintősíkjai a koordinátatengelyekből a összegű darabokat vágnak le. (Azaz, ha az érintősík az x', y' és z' helyen metszi a koordinátatengelyeket, akkor $x' + y' + z' = a$.)

III$^{\mathrm{A}}$. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy a

$$h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

függvény érintősíkjai átmennek az origón.