# Kalkulus 2, 4. hét

## Függvénysorozatok és függvénysorok egyenletes konvergenciája

I$^{\mathrm{Gy}}$ . Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergenciatartományon.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-nx}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n}+n\pi\right)$

II$^{\mathrm{A}}$ . Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan monoton függvény, melyre a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(a)|$ és a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(b)|$ sor konvergens. Igazoljuk, hogy ekkor a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ függvénysor abszolút- és egyenletesen konvergens.

III$^{\mathrm{A}}$ . Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $\mathbb{Q}$ halmazon, akkor egyenletesen konvergens az egész $\mathbb{R}$ halmazon is.

IV$^{\mathrm{Gy}}$ . Legyen $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{x+k}{n+1}\right).$$

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ pontokénti határfüggvényt és mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál a pontokénti határfüggvényhez.

V$^{\mathrm{A}}$ . Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(I, \mathbb{R})$ olyan, melyre a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens az $I$ halmazon. Igazoljuk, hogy ekkor az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

VI$^{\mathrm{H}}$ **. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(I, \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens a $I$ halmazon, ha a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor minden átrendezettje egyenletesen konvergens a $I$ halmazon.

## Függvénysorozatok, függvénysorok és hatványsorok integrálása és deriválása

I$^{\mathrm{Gy}}$ . Igazoljuk, hogy

1. a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n9^n} x^n$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[-8, 9]$ halmazon;
2. a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n9^n} x^{2n}$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[-3, 3]$ halmazon.

II$^{\mathrm{Gy}}$ . Igazoljuk a függvénysorok deriváltjára kapott kifejezéseket!

$$1. \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4 + x^2}$$

$$2. \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\,\mathrm{e}^{-kx^2}\right) = -2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,\mathrm{e}^{-kx^2}$$

III$^{\mathrm{Gy}}$ . Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{arctg}(kx)}{2^{k-1}} \quad \text{és} \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1-x}{k}}{k+1} .$$

Legyen $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ és $g = \lim_{n\to\infty} g_n$. Határozzuk meg az $f'(0)$ és a $g'(1)$ értékét.

IV$^{\mathrm{Gy}}$ . Határozzuk meg az alábbi határértékeket.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{arctg} n^5 x^2}{x + \sqrt{n}}\,\mathrm{d}\,x \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^{1} \frac{x^n}{\mathrm{e}^{nx}}\,\mathrm{d}\,x$$

V$^{\mathrm{A}}$ . Tekintsük a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ hatványsort.

1. Mutassuk meg, hogy a hatványsor egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ halmazon.
2. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. (Segítség: $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$.)
3. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi - \ln 4}{4}$. (Segítség: $\frac{\pi - \ln 4}{4} = \int_0^1 \arctan$.)

VI$^{\mathrm{H}}$ . Mutassuk meg, hogy minden $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$\int_0^1 x^n \log^k x \,\mathrm{d}\,x = (-1)^k \frac{k!}{(1+n)^{1+k}}$$

teljesül, vagyis speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\int_0^1 (-x \log x)^n \,\mathrm{d}\,x = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$. Majd ezek alapján igazoljuk, hogy

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} .$$

4. hét, Kalkulus 2, 2019.03.01., Andai Attila