Kalkulus 2, 2. hét

Határérték

I. Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határtértékek, és ha léteznek, számoljuk ki azokat!

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
2. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2}$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+x-y}{xy+x+y}$
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+x-y^2}$
7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$
8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arcsin\dfrac{x}{y}$
9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$
10. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^4-y^4}{x^3+y^3}$
11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+x^2y)}{x^2+y^2}$
12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$
13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-2y}{3x+y}$
14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^3y^3}}{x^2+y^2}$
15. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\infty)} \dfrac{1}{xy}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{xy}{1+xy}\right)$

Folytonosság

I^{Gy} . Folytonosak-e az alábbi $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvények a $(0,0)$ pontban?

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{ha}\quad (x,y)=(0,0);\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{xy} & \text{ha}\quad xy\neq 0,\\ 0 & \text{ha}\quad xy=0;\end{cases}$$

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. Tekintsük az

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\qquad (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{ha}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha}\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

függvényt.

1. Folytonos-e az f függvény az origón átmenő egyenesek mentén?
2. Folytonos-e f a $(0,0)$ pontban?

$\mathrm{III}^{\mathrm{H}}$. Tekintsük a

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad x\mapsto\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{ha}\quad x\neq 0;\\ 0, & \text{ha}\quad x=0.\end{cases}$$

függvényt és a $\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ y=f(x)\right\}$ halmazt.

1. Igazoljuk, hogy a Γ halmaz összefüggő.
2. Igazoljuk, hogy a Γ halmaz nem ívszerűen összefüggő.

3. Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ halmaz összefüggő.
4. Legyen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{10} \cdot f\left(\frac{2x-1}{\pi}\right)$. Tekintsük az

$$A = \left\{(x - g(x), x + g(x)) \in \mathbb{R}^2 | \; x \in [0,1]\right\} \qquad B = [0,1]^2 \setminus A$$

halmazokat. Igazoljuk, hogy $(0,0), (1,1) \in A$, $(0,1), (1,0) \in B$, $A, B \subseteq [0,1]^2$, $A \cap B = \emptyset$, valamint, hogy A és B összefüggő.

Operátornorma

I^{Gy} . Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mátrixot, mint $A : \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_i\right) \to \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_j\right)$ normált terek közötti lineáris leképezést, ahol $i, j \in \{1, 2, \infty\}$ és határozzuk meg ezen esetekben az A leképezés normáját.

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ mátrixot, mint $A : \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_i\right) \times \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_i\right) \to \mathbb{R}$ normált terek közötti bilineáris leképezést, ahol $i \in \{1, 2, \infty\}$.

1. Igazoljuk, hogy az $i = 1$ esetben $\|A\| = 5$.
2. Igazoljuk, hogy az $i = \infty$ esetben $\|A\| = 10$.

3*. Igazoljuk, hogy az $i = 2$ esetben $\|A\| = 3 + 2\sqrt{2}$.

Skaláris szorzás

I^{Gy} . A $V = \mathbb{R}^2$ vektortéren mely $p, q \in \mathbb{R}$ paraméter esetén lesz

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1 + 4 x_2 y_2 - p x_1 y_2 - q x_2 y_1$$

skaláris szorzás?

$\mathrm{II}^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}$ feletti $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ skalárszorzatos vektortérben az alábbiak teljesülnek.

1. Az $(x + y) \perp (x - y)$ reláció pontosan akkor teljesül, ha $\|x\| = \|y\|$.
2. Ha $\|x\| = \|y\| = 1$ és $x \perp y$, akkor $\|x - y\| = \sqrt{2}$.
3. Ha x_1, x_2, x_3, x_4 ortonormált rendszer, akkor a

$$(x_1 + x_2), (x_1 - x_2), (x_3 + x_4), (x_3 - x_4)$$

vektornégyes ortogonális rendszert alkot.

4. Az $\{y \in V | x \perp y\}$ halmaz altér V-ben.

III$^{\mathrm{Gy}}$. Skaláris szorzást definiálnak-e az $\mathbb{R}$ feletti V vektortéren az alábbi kifejezések?

1. $V = C^1([0,1],\mathbb{R})$ $\quad \langle f,g\rangle = \int\limits_0^1 fg$
2. $V = C^1([0,1],\mathbb{R})$ $\quad \langle f,g\rangle = \int\limits_0^1 f'g'$
3. $V = C^1([0,1],\mathbb{R})$ $\quad \langle f,g\rangle = \int\limits_0^1 f'g' + f(0)g(0)$
4. $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + x_3y_3$
5. $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2$
6. $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad \langle A,B\rangle = \operatorname{Tr} A^T B$

IV$^{\mathrm{A}}$. Mekkora a $p(x) = x^2 + 2x$ és a $q(x) = x^3 + 1$ polinomok által bezárt szög a polinomok V vektorterében, ha a polinomok skaláris szorzatát a

$$\langle \cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R} \qquad (P,Q) \mapsto \int_0^\alpha (PQ)$$

kifejezéssel definiáljuk, ahol $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ paraméter?

V$^{\mathrm{A}}$. Igazoljuk az alábbiakat.

1. Minden $f,g \in C([a,b],\mathbb{R})$ függvényre $\left|\int\limits_a^b fg\right|^2 \le \int\limits_a^b f^2 \cdot \int\limits_a^b g^2$ teljesül.
2. Minden $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixra $\operatorname{Tr}^2(AB) \le \operatorname{Tr} A^2 \cdot \operatorname{Tr} B^2$ teljesül.