Kalkulus 2, 1. hét

Nyílt, zárt és kompakt halmazok metrikus téren

I^{Gy} . Legyen (M, d) metrikus tér és legyen $A, B \subseteq M$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ és $\operatorname{Int}(A \cap B) = (\operatorname{Int} A) \cap (\operatorname{Int} B)$ teljesül.

II^{A} . Legyen (M, d) metrikus tér és legyen $(E_i)_{i \in I}$ az M részhalmazainak tetszőleges rendszere. Bizonyítsuk be a következőket.

1. $\operatorname{Int}\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} \operatorname{Int} E_i$
2. $\operatorname{Int}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) \supseteq \bigcup_{i \in I} \operatorname{Int} E_i$
3. $\overline{\bigcap_{i \in I} E_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{E_i}$
4. $\overline{\bigcup_{i \in I} E_i} \supseteq \bigcup_{i \in I} \overline{E_i}$

$\mathrm{III}^{\mathrm{A}}$. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény. Igazoljuk, hogy ekkor

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$$

metrika.

$\mathrm{IV}^{\mathrm{Gy}}$. Tekintsük a valós számok halmazán a

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x, y) \mapsto |2^x - 2^y|$$

metrikát. Adjuk meg a $B_1(0)$ és a $B_2(1)$ halmaz elemeit.

V^{A} . Tekintsük az M halmazon a d diszkrét metrikát, azaz

$$d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \neq y; \\ 0, & \text{ha} \quad x = y. \end{cases}$$

1. Mutassuk meg, hogy az M minden részhalmaza nyílt és zárt halmaz.
2. Adjuk meg az M tér kompakt részhalmazait.

$\mathrm{VI}^{\mathrm{Gy}}$. Definiáljuk az alábbi leképezéseket.

$$\begin{aligned} d_1 &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \\ d_2 &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y| \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{R}, d_1)$ és $(\mathbb{R}, d_2)$ nem teljes metrikus terek.

$\mathrm{VII}^{\mathrm{A}}$. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p_1, p_2 \in [0, \infty]$. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ téren a d_{p_1} és d_{p_2} metrikák ekvivalensek.

$\mathrm{VIII}^{\mathrm{A}}$. Legyen (M, d) metrikus tér. Igazoljuk, hogy az alábbi $d_i : M \times M \to \mathbb{R}^+$ $(i = 1, 2, 3)$ függvények is metrikát határoznak meg.

$$d_1(x,y) = \min(d(x,y), 1) \quad d_2(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \quad d_3(x,y) = \log(d(x,y) + 1)$$

IX^{A} . Legyen (M, d) metrikus tér és legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ olyan függvény, melyre

1. $f(0) = 0$ és minden $x > 0$ esetén $f(x) > 0$;
2. f monoton növő;
3. minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Mutassuk meg, hogy ekkor $(M, f \circ d)$ is metrikus tér.

X^{A} . Legyen M a sakktábla mezőinek halmaza. Az $x, y \in M$ mezők közötti $d(x, y)$ távolság legyen az a legkisebb n természetes szám, melyre igaz, hogy az x mezőről indulva n lépésben el tudunk jutni az y mezőre lólépésben.

1. Adjuk meg a $d(A1, B1)$, $d(A1, B2)$ és $d(D4, E5)$ távolságokat.
2. Mik lesznek a $B_2(C3)$ és a $B_3(H8)$ halmaz elemei?

$\mathrm{XI}^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy metrikus téren véges sok kompakt halmaz uniója kompakt, valamint, hogy kompakt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete is kompakt.

$\mathrm{XIII}^{\mathrm{A}}$. Mutassuk meg, hogy teljes metrikus tér minden zárt részhalmaza teljes.

$\mathbb{R}^n$ topológiája

I$^{\mathrm{Gy}}$. Adjuk meg az alábbi halmazok belső, torlódási, határ és izolált pontjait, valamint a lezártját és a belsejét.

1. $\left\{\left(\dfrac{-1}{n}, \dfrac{-1}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup\,]3,4] \times \{0\}$
2. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x,\ 0 < y < x^2\right\}$
3. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < 1,\ y = \sin\dfrac{1}{x}\right\}$
4. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x,\ y < \sin\dfrac{1}{x}\right\}$
5. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 < 16,\ 0 < x,\ 0 \le y\right\}$

II$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}^+$, $k \le n$. Bizonyítsuk be, hogy

a.) a $\mathrm{pr}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ projekció függvény folytonos;
b.) minden $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz esetén $\mathrm{pr}_k(U) \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz.

III$^{\mathrm{Gy}}$. A folytonosság topologikus jellemzésével igazoljuk, hogy

a.) a $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y,\ x^2 + y^2 < 1\right\}$ halmaz nyílt;
b.) a $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le z \le \mathrm{e}^{x+y}\right\}$ halmaz zárt;
c.) a $\left\{(x,x^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}\right\}$ halmaz zárt;
d.) a $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < x + y < 3,\ -1 < x < 2\right\}$ halmaz nyílt.

IV$^{\mathrm{Gy}}$. Legyen $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Mutassuk meg, hogy ekkor $K_1 \times K_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ is kompakt halmaz.

V$^{\mathrm{Gy}}$. Igazoljuk, hogy $\overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}} = \mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R}^n$ értékű sorozat határérték

I$^{\mathrm{Gy}}$. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ teret az euklidészi (d_2) metrikával. Határozzuk meg az alábbi határértékeket ebben a térben, ha azok léteznek.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2-1}{n^2+1}, \sin\dfrac{1}{n}, \sqrt{n^2+2n} - n\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\dfrac{2n+5}{2n+3}\right)^{3n+1}, \sqrt[2n]{3n^3+2n+1}, \operatorname{arctg}(n^n)\right)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{n}}, \sqrt[2n]{4^n + 2\cdot 3^n + 2}, \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right)$