Komplex függvénytan

Andai Attila*

2019. március 24.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis 2 tantárgy komplex függvénytan anyagának elméleti összefoglalóját tartalmazza ez az oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Az alábbi művekből vannak szinte szó szerint átvéve az definíciók és a tételek.

Kristóf János: A matematikai analízis elemei III. *http://web.cs.elte.hu/˜krja/*

Petruska György: Komplex függvénytan. Nemzeti Tankönyvkiadó, 1998, Budapest.

Robert B. Ash, W.P. Novinger: Complex variables. *https://faculty.math.illinois.edu/˜r-ash/CV.html*

2019. március 24.
Andai Attila

1 Komplex függvénytan

1.1. Komplex differenciálhatóság

1.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az f *függvény komplex differenciálható*, vagy *holomorf az a pontban* ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény differenciálható az a pontban és a $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés $\mathbb{C}$-lineáris. Ekkor a $(\mathrm{D}f)(a)(1,0) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ komplex számot az f *függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük.
- Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük az

$$f' = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Int} \operatorname{Dom} f) \times \mathbb{C} \;\middle|\; \exists (\mathrm{D}f)(a) \;\wedge\; (\mathrm{D}f)(a)(1,0) = A \right\}$$

  függvényt.
- Azt mondjuk, hogy az f függvény *reguláris az $a \in \mathbb{C}$ pontban*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \operatorname{Dom} f'$ teljesül, vagyis, ha f $\mathbb{C}$-differenciálható az a pont egy környezetében.
- Az f függvény *holomorf* vagy *reguláris* vagy *$\mathbb{C}$-differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} f'$.
- Azt mondjuk, hogy f *egész függvény*, ha $\operatorname{Dom} f = \mathbb{C}$ és f holomorf.

1.1. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor holomorf az a pontban, ha létezik a*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

határérték és ekkor

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

teljesül.

1.2. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Tekintsük az f által meghatározott*

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}\, y) \\ v &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}\, y) \end{aligned}$$

függvényeket. Azaz minden $x, y \in \mathbb{R}$ számra $x + \mathrm{i}\, y \in \operatorname{Dom} f$ esetén

$$f(x + \mathrm{i}\, y) = u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y)$$

teljesül. Ekkor az f függvény pontosan akkor holomorf az $a = x_0 + \mathrm{i}\, y_0$ pontban, ha az u és v függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, valamint

$$\begin{aligned} u_1'(x_0, y_0) &= v_2'(x_0, y_0) \\ u_2'(x_0, y_0) &= -v_1'(x_0, y_0) \end{aligned}$$

teljesül. Ezen utóbbi két egyenletet nevezzük Cauchy–Riemann-egyenleteknek. Ha f differenciálható az a pontban, akkor deriváltja

$$f'(x_0 + \mathrm{i}\, y_0) = u_1'(x_0, y_0) + \mathrm{i}\, v_1'(x_0, y_0).$$

1.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{C}$ pontban és tegyük fel, hogy $f'(a) \neq 0$. Ekkor az $|f'(a)|$ számot az f *függvény a pontbeli nyújtási együtthatójának* nevezzük. Azt a jól meghatározott $\varphi \in \,]-\pi, \pi]$ számot pedig, melyre $f'(a) = |f'(a)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ teljesül az f *függvény a pontbeli forgatási együtthatójának* nevezzük.

1.2. Görbe menti integrál

1.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ görbe *szakaszonként C^1-osztályú folytonos görbe*, ha γ folytonos és létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ véges pontrendszer, melyre a $t_0 = 0$ és $t_{n+1} = 1$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0,\dots,n\}$ esetén $t_i < t_{i+1}$, γ folytonosan differenciálható a $]t_i, t_{i+1}[$ intervallumon, valamint ezen az intervallumon létezik a deriváltjának a jobb oldali határértéke a t_i pontban és bal oldali határértéke a t_{i+1} pontban. A szakaszonként C^1-osztályú folytonos görbék halmazára a Γ jelölést használjuk.
A $\gamma \in \Gamma$ görbéről az mondjuk, hogy *zárt*, ha $\gamma(0) = \gamma(1)$. Ezek halmazát Γ_0 szimbólummal jelöljük.

1.4. Definíció. Legyen $\gamma \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ olyan véges pontrendszer, melyre a $t_0 = 0$ és $t_{n+1} = 1$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0,\dots,n\}$ esetén $t_i < t_{i+1}$, γ folytonosan differenciálható a $]t_i, t_{i+1}[$ intervallumon, valamint ezen az intervallumon létezik a deriváltjának a jobb oldali határértéke a t_i pontban és bal oldali határértéke a t_{i+1} pontban. Minden $i = 0,\dots,n$ esetén legyen

$$g_i : [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_i+0} \dot\gamma(t), & \text{ha} \quad t = t_i; \\ \dot\gamma(t), & \text{ha} \quad t_i < t < t_{i+1}; \\ \lim\limits_{t\to t_{i+1}-0} \dot\gamma(t), & \text{ha} \quad t = t_{i+1}. \end{cases}$$

Ekkor a

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t)) g_i(t)\,\mathrm{d}\,t$$

mennyiséget az *f függvény γ görbe menti integráljának* nevezzük és a $\int_\gamma f$, vagy a kicsit pongyola, de természetes $\int_0^1 f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}\,t$ szimbólummal jelöljük. Amennyiben a γ görbe zárt, a vonalmenti integrálra még a $\oint_\gamma f$ szimbólumot is használjuk.
Továbbá a

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |g_i(t)|\,\mathrm{d}\,t$$

mennyiséget a *γ görbe hosszának* nevezzük és az $L(\gamma)$ szimbólummal jelöljük.

1.3. Tétel. *Legyen $\gamma \in \Gamma$ és $f, g : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ és $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} g$ teljesül.*

1. $\displaystyle\int_\gamma (f+g) = \int_\gamma f + \int_\gamma g$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C} : \quad \displaystyle\int_\gamma (\lambda f) = \lambda \int_\gamma f$
3. *Legyen* $\delta : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\delta(t) = \gamma(1-t)$, *ekkor* $\displaystyle\int_\delta f = -\int_\gamma f$.
4. $\displaystyle\left|\int_\gamma f\right| \le L(\gamma) \sup_{x\in\operatorname{Ran}\gamma} |f(x)|$

Jelölés. Adott $a, b \in \mathbb{C}$ számok esetén jelölje $[a,b]$ az *a és b pontokat összekötő szakaszt*, vagyis

$$[a,b] = \{a + t(b-a) \in \mathbb{C} |\ t \in [0,1]\}.$$

1.5. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{C}$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor az f függvény $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a + t(b - a)$ görbe menti integrálját a $\int_{[a,b]} f$ szimbólummal jelöljük, tehát

$$\int_{[a,b]} f = (b - a) \int_0^1 f(a + t(b - a)) \,\mathrm{d}\, t.$$

1.4. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{C} \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b] \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

1. $\displaystyle\int_{[a,b]} f = -\int_{[b,a]} f.$
2. $\displaystyle\left|\int_\gamma f\right| \leq |b - a| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
3. *Minden $c \in [a, b]$ pontra* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$

1.6. Definíció. Legyen $f, F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a F *az f primitív függvénye*, ha F differenciálható és $F' \subseteq f$ teljesül, valamint F *az f globális primitív függvénye*, ha $F' = f$ teljesül.

1.5. Tétel. *Legyen $\gamma \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha $F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ az f primitív függvénye és $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} F$ teljesül, akkor*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

1.6. Tétel. *Legyen $\gamma \in \Gamma_0$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha létezik olyan $F : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ primitív függvénye az f függvénynek, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} F$ teljesül, akkor*

$$\oint_\gamma f = 0.$$

1.3. A Newton–Leibniz-tétel és a Goursat-lemma

Jelölés. Adott $a, b, c \in \mathbb{C}$ számok esetén jelölje

$$T(a, b, c) = \left\{\alpha a + \beta b + \gamma c \in \mathbb{C} || (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1]^3 \ \wedge\ \alpha + \beta + \gamma = 1\right\}$$

az a, b, c csúcspontú háromszöget.

Jelölés. Legyen $a, b, c \in \mathbb{C}$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b], [b, c], [c, a] \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor az a, b, c háromszög oldalain való integrálást a megfelelő irányítással az alábbi módon fogjuk jelölni.

$$\int_{[a,b,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f$$

1.7. Definíció. Az $U \subseteq \mathbb{C}$ halmazról azt mondjuk, hogy *csillaghalmaz*, ha létezik olyan $x \in U$ pont, melyre minden $u \in U$ esetén $[x, u] \subseteq U$ teljesül. Ekkor az x pontot *csillagcentrumnak* hívjuk.

1.7. Tétel. *(Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt csillaghalmaz. Akkor és csak akkor létezik f-nek az U halmazon értelmezett primitív függvénye, ha* *minden $a, b, c \in U$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq U$ esetén $\int_{[a,b,c]} f = 0$. Továbbá, ha teljesül ez a feltétel és $c \in U$ csillagcentruma az U halmaznak, akkor az*

$$F : U \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \int_{[c,z]} f$$

függvény primitív függvénye az f függvénynek az U halmazon.

1.8. Tétel. *(Goursat-lemma.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq \operatorname{Dom} f$ esetén $\int_{[a,b,c]} f = 0$.*

1.9. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$ ponthoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $F : B_r(a) \to \mathbb{C}$ függvény, melyre $F' \subseteq f$ teljesül, azaz F a f primitív függvény az a halmaz egy környezetén.*

1.10. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve, és legyen $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt csillaghalmaz. Ekkor létezik az f fügvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.*

1.4. Az indexfüggvény

1.11. Tétel. *Legyen $n, m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ függvényt és a $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ görbét. Ekkor*

$$\int_\gamma f = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n \neq -1; \\ m, & \text{ha} \quad n = -1. \end{cases}$$

1.8. Definíció. A $\gamma \in \Gamma$ *görbe indexfüggvényének* nevezzük az alábbi függvényt.

$$\operatorname{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ran} \gamma \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\mathrm{id}_\mathbb{C} - z}$$

1.12. Tétel. *Legyen $m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük a $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,mt}$ görbét. Ekkor minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = r\}$ esetén*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad |z| > r; \\ m, & \text{ha} \quad |z| < r. \end{cases}$$

1.13. Tétel. *Legyen $\gamma \in \Gamma$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. $\operatorname{Ran} \operatorname{Ind}_\gamma \subseteq \mathbb{Z}$
2. *Az $\operatorname{Ind}_\gamma$ függvény folytonos.*
3. *Ha valamely $z \in \mathbb{C}$ számra $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq B_{|z|}(0)$ teljesül, akkor $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$.*

1.5. Cauchy integráltételei

1.9. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér, $U \subseteq M$ és $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ zárt folytonos görbe. Azt mondjuk, hogy a *γ_0 és γ_1 kontúrhomotópok az $U \subseteq M$ halmazban*, ha létezik olyan $H : [0,1]^2 \to U$ folytonos függvény, hogy minden $t \in [0,1]$ esetén $H(0,t) = \gamma_0(t)$ és $H(1,t) = \gamma_1(t)$, valamint minden $p \in [0,1]$ esetén $H(p,0) = H(p,1)$.

1.10. Definíció. Legyen (M,d) metrikus tér és $U \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az *$U \subseteq M$ halmaz egyszeresen összefüggő*, ha U ívszerűen összefüggő és minden U halmazban haladó zárt folytonos görbe kontúrhomotóp az U halmazban egy konstansfüggvénnyel. Az *(M,d) metrikus tér egyszeresen összefüggő*, ha az M halmaz egyszeresen összefüggő.

1.14. Tétel. *(Cauchy intergáltétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\operatorname{Dom} f$ nyílt halmaz és minden $z \in \operatorname{Dom} f$ esetén van a z pontban értelmezett primitív függvénye az f függvénynek. Ha $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma_0$ olyan görbék, melyek kontúrhomotópok a $\operatorname{Dom} f$ halmazban, akkor*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

1.15. Tétel. *(Cauchy első integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\operatorname{Dom} f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ és létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq U \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül, akkor*

$$\oint_{\gamma} f = 0.$$

1.16. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melyre a $\operatorname{Dom} f$ halmaz egyszeresen összefüggő. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ esetén*

$$\oint_{\gamma} f = 0$$

teljesül.

1.17. Tétel. *(Cauchy második integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq U$ teljesül. Ekkor minden $z \in U \setminus \operatorname{Ran} \gamma$ pontra*

$$f(z) \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{\gamma} \frac{f}{\mathrm{id} - z}.$$

Jelölés. Adott $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen

$$\gamma_{r,a} : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto a + r\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,t}$$
$$S_r(a) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z - a| = r\}.$$

1.18. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{\gamma_{r,a}} \frac{f}{\mathrm{id} - z}.$$

1.6. Cauchy transzformáció

1.11. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor az *f függvény γ görbe szerinti Cauchy-transzformáltja*

$$C_{f,\gamma} : \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ran}\gamma \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f}{\mathrm{id}_\mathbb{C} - z}.$$

1.19. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

1. *A $C_{f,\gamma}$ függvény $\mathbb{C}$-analitikus.*
2. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ esetén a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergencia-sugara nem kisebb a $\operatorname{dist}(a, \operatorname{Ran}\gamma)$ számnál.*
3. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ esetén a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik a $\mathbb{C}_{f,\gamma}$ függvénnyel a $B_{\operatorname{dist}(a,\operatorname{Ran}\gamma)}(a)$ halmazon.*
4. *Minden $a \in \operatorname{Dom} C_{f,\gamma}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$C^{(n)}_{f,\gamma}(a) = \frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f}{(\mathrm{id}_\mathbb{C} - a)^{n+1}} \ .$$

1.20. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény.*

1. *Az f függvény $\mathbb{C}$-analitikus.*
2. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugara nem kisebb a*
$$r_a = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ \middle| \overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f\right\}$$
számnál.
3. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik az f függvénnyel a $B_{r_a}(a)$ halmazon.*
4. *Minden $a \in \operatorname{Dom} f$, $r \in \,]0, r_a[$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\gamma_{a,r}} \frac{f}{(\mathrm{id}_\mathbb{C} - a)^{n+1}} \ .$$

1.7. Holomorf függvény analitikusságának elemi következményei

1.21. Tétel. *(Megszüntethető szingularitások tétele.) Ha $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett olyan folytonos függvény, mely legfeljebb egy pontot kivéve minden pontban holomorf, akkor f holomorf.*

1.22. Tétel. *Ha $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, akkor minden $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazhoz létezik az f függvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.*

1.23. Tétel. *(Morera tétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Az f függvény holomorf.*
2. *Minden $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazra és $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U$ esetén $\displaystyle\int_\gamma f = 0$ teljesül.*
3. *Minden $a, b, c \in \operatorname{Dom} f$ esetén, ha $T(a,b,c) \subseteq \operatorname{Dom} f$, akkor $\displaystyle\int_{[a,b,c]} f = 0$.*

1.8. Cauchy-egyenlőtlenség és Liouville tétele

1.24. Tétel. *(Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $z \in B_r(a)$ számra*

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{|z-a|}{r}\right)^{n+1}} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

1.25. Tétel. *(Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

1.26. Tétel. *(Liouville-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett holomorf függvény. Ha létezik olyan $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n-ed fokú polinom és $R \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$ számra $|f(z)| \leq |P(z)|$ teljesül, akkor f is legfeljebb n-ed fokú polinom.*

1.27. Tétel. *(Liouville-tétel.) Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett, korlátos holomorf függvény, akkor f állandó.*

1.9. Holomorf függvények sorozata

1.28. Tétel. *Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon, akkor*

1. *az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény szintén holomorf;*
2. *minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az U halmazon;*
3. $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)^{(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}$.

1.10. Holomorf függvények gyökei

1.29. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ összefüggő halmazon értelmezett, nem azonosan 0 holomorf függvény és $N_f = \{z \in \operatorname{Dom} f \mid f(z) = 0\}$.*

1. *Az N_f halmaz minden pontja izolált pont.*
2. *Minden $a \in N_f$ ponthoz egyértelműen létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $g : \operatorname{Dom} f \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, hogy $g(a) \neq 0$ és minden $z \in \operatorname{Dom} f$ számra $f(z) = (z-a)^n g(z)$ teljesül. Ezt az n számot nevezzük az a gyök multiplicitásának.*
3. *Az N_f halmaz megszámlálható.*

Jelölés. Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ összefüggő halmazon értelmezett, nem azonosan 0 holomorf függvény esetén vezessük be az

$$N_f = \{z \in \operatorname{Dom} f \mid f(z) = 0\}$$

jelölést a zérushelyekre és minden $a \in N_f$ esetén az a gyök multiplicitását jelölje $m_f(a)$.

1.11. Lokális maximum elve

1.30. Tétel. *Ha $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $a \in \operatorname{Dom} f$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméterrel, hogy $\overline{B_r(a)} \subseteq \operatorname{Dom} f$, akkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}\right) \right|^2 \mathrm{d}\,\varphi\ .$$

1.31. Tétel. *(Lokális maximum elve.) Ha $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \operatorname{Dom} f$ olyan pont, hogy f nem állandó az a pont valamely környezetén, akkor az $|f|$ függvénynek nincs lokális maximuma az a pontban.*

1.32. Tétel. *(Schwarz-lemma.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $f : B_r(a) \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, és $C \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $z \in B_r(a)$ esetén $|f(z) - f(a)| \le C$. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra*

$$|f(z) - f(a)| \le C\frac{|z-a|}{r}$$

teljesül, valamint $|f'(a)| \le \dfrac{C}{r}$.

1.12. Egészeken értelmezett sorozatból képzett sor

1.33. Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{C}$ diszkrét zárt halmaz és $f, g : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$ olyan holomorf fggvény, hogy*

1. *az $f - g$ függvénynek a D halmaz minden pontjában létezik határértéke;*
2. $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus D} |f(z) - g(z)| < \infty$*;*
3. $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus D} |f(z) - g(z)| = 0$*,*

akkor $f = g$.

Jelölés. Ha $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ olyan sorozat, melyre a $\sum\limits_k a_{-k}$ és a $\sum\limits_k a_k$ sor is konvergens, akkor vezessük be a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

jelölést.

1.34. Tétel.

1. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} :\quad \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}$
2. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \dfrac{1}{2}\right) :\quad \dfrac{\pi^2}{\cos^2(\pi z)} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(z+k-\frac{1}{2}\right)^2}$
3. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} :\quad \operatorname{ctg}(\pi z) = \dfrac{1}{\pi z} + \dfrac{2z}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2}$
4. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \dfrac{1}{2}\right) :\quad \operatorname{tg}(\pi z) = \dfrac{2z}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \left(k+\frac{1}{2}\right)^2}$

1.13. Laurent-sorfejtés

1.12. Definíció. Ha $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $R \in]r, \infty]$, akkor a

$$C_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} |\ r < |z - a| < R\} \tag{1.1}$$

halmazt az *a középpontú r belső és R külső sugarú nyíl körgyűrűnek* nevezzük.

1.35. Tétel. *(Laurent-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint $a \in \mathbb{C}$ és $r, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ olyan, hogy $r < R$ és $C_{r,R}(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ függvény, hogy minden $r', R' \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $r < r' < R' < R$, akkor a*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \qquad \textit{és} \qquad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r',R'}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{r,R}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \ .$$

Továbbá ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran} \gamma \subseteq C_{r,R}(a)$ teljesül, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) c_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f}{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}} \ .$$

1.13. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(a) \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Dom} f$. Legyen

$$r(a) = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ |\ \overline{B_r(a)} \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Dom} f \right\} .$$

Ekkor a Laurent-tétel alapján egyértelműen léteznek olyan olyan $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ együtthatók, hogy minden $r, R \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $0 < r < R < r(a)$, akkor a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \qquad \text{és} \qquad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r,R}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{0,r(a)}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \ .$$

Ekkor a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^n$$

függvénysort az *f függvény a pontbeli Laurent-sorfejtésének* nevezzük. A Lurant-sorfejtés *reguláris része*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^n,$$

a *főrésze* pedig

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(\mathrm{id}_{\mathbb{C}} - a)^n} \ .$$

A c_{-1} számot az *f függvény a pontbeli reziduumának* nevezzük és a $\operatorname{Res}_f(a)$ szimbólummal jelöljük.

1.14. Reziduum-tétel

1.14. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(a) \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Dom} f$. Legyen

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\mathrm{id}_\mathbb{C} - a)^n$$

az f függvény a pontbeli Laurent-sorfejtése.

- *Az f függvény az a pontban reguláris*, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $c_{-n} = 0$.
- *Az f függvénynek az a pontban m-ed rendű pólusa* van, ha $m \in \mathbb{N}^+$, $c_{-m} \neq 0$ és minden $k > m$ természetes számra $c_{-k} = 0$.
- *Az f függvénynek az a pontban legfeljebb m-ed rendű pólusa* van, ha $m \in \mathbb{N}^+$ és minden $k > m$ természetes számra $c_{-k} = 0$.
- *Az f függvénynek az a pontban lényeges szingularitása* van, ha a $\{n \in \mathbb{N}^+ | \, c_{-n} \neq 0\}$ halmaz végtelen.

Jelölés. Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény pólusainak a halmazát jelölje P_f és minden $a \in P_f$ esetén legyen $r_f(a)$ az a pólus rendje.

1.36. Tétel. *Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek m-ed rendű ($m \in \mathbb{N}^+$) pólusa van az a pontban. Ekkor*

$$\operatorname{Res}_f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \left(\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\, z^{m-1}} \left((z-a)^m f(z)\right) \right) .$$

1.15. Definíció. Az $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény *meromorf*, ha létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és olyan $D \subseteq U$ diszkrét zárt halmaz, hogy $\operatorname{Dom} f = \Omega \setminus D$ és az f függvénynek a D halmaz minden pontjában pólusa van.

1.37. Tétel. *(Reziduum-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $U \subseteq \mathbb{C}$ olyan egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, és $A \subseteq U$ olyan véges halmaz, hogy $U \setminus A \subseteq \operatorname{Dom} f$, és az $f|_{U\setminus A}$ függvény meromorf. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor*

$$\int_\gamma f = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{a\in A} \operatorname{Ind}_\gamma(a) \operatorname{Res}_f(a) .$$

1.38. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(a) \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Dom} f$. Legyen $r(a) = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}^+ | \, \overline{B_r(a)} \setminus \{a\} \subseteq \operatorname{Dom} f \right\}$ és az f függvény a pont körüli Laurent-sorfejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$.*

1. *Ekkor minden $r \in]0, r(a)[$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén $|c_n| \leq \frac{1}{r^n} \cdot \sup_{z\in S_r(a)} |f(z)|$.*
2. *Az f függvénynek pontosan akkor van reguláris kiterjesztése az a pontban, ha létezik olyan $r \in]0, r(a)[$, melyre az $f(B_r(a) \setminus \{a\})$ halmaz korlátos.*
3. *Az f függvénynek pontosan akkor van m-ed rendű pólusa az a pontban, ha létezik olyan $r \in]0, r(a)[$ és $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$ esetén $\frac{C_1}{|z-a|^m} \leq |f(z)| \leq \frac{C_2}{|z-a|^m}$.*
4. *Az f függvénynek pontosan akkor van lényeges szingularitása az a pontban, ha minden $k \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $C_k \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $r \in]0, r(a)[$ esetén $\frac{C_k}{r^k} \leq \sup_{z\in S_r(a)} |f(z)|$.*

1.15. Reziduum-tétel következményei

1.39. Tétel. *(Casorati–Weierstrass-tétel.) Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek lényeges szingularitása van az a pontban. Ekkor minden $\rho \in]0, r[$ esetén $\overline{f(B_\rho(a) \setminus \{a\})} = \mathbb{C}$.*

1.40. Tétel. *(Argumentum-elv.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz és $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ olyan nem azonos nulla holomorf függvény, melyre $P_f = A$ teljesül. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor*

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{a \in N_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_f(a) - \sum_{a \in P_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) r_f(a) \ .$$

1.41. Tétel. *(Rouché-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $f, g : U \setminus \to \mathbb{C}$ nem azonosan nulla holomorf függvény és $\gamma \in \Gamma_0$ görbe a $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq U$ tulajdonsággal. Ha minden $z \in \operatorname{Ran}\gamma$ esetén $|g(z)| < |f(z)|$ teljesül, akkor*

$$\sum_{a \in N_f} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_f(a) = \sum_{a \in N_{f+g}} \operatorname{Ind}_\gamma(a) m_{f+g}(a) \ .$$

1.42. Tétel. *(Nyílt leképezés tétele.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{C}$ nem konstans holomorf függvény. Ekkor az $f(U)$ halmaz is nyílt.*

1.43. Tétel. *(Hurwitz-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az U halmazon értelmezett komplex értékű holomorf függvények lokálisan egyenletesen konvergens sorozata az $f : U \setminus \to \mathbb{C}$ nem azonosan nulla határfüggvénnyel. Ekkor egy $z \in U$ elem pontosan akkor gyöke az f függvénynek, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N \leq n$ számra az f_n függvénynek van gyöke a $B_\varepsilon(z)$ halmazban.*