Analízis 2, 13–14. hét

Improprius integrálok

Improprius és főérték integrál[1]

I. Legyen $a \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{T}$ (azaz $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$) és $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ekkor az *a csúcspontú, w tengelyű, 2α nyílásszögű kúp*

$$\operatorname{Sect}(a, w, \alpha) = \left\{ a + rw\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \mid r \in \mathbb{R}_0^+,\ t \in [-\alpha, \alpha] \right\}.$$

Legyen $\rho \in \mathbb{R}^+$ és $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melyre $\operatorname{Sect}(a, w, \alpha) \setminus B_\rho(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Mutassuk meg, hogy minden $r \in]\rho, \infty[$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ és a $\gamma_r : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = a + rw\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ görbe esetén

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{e}^{-\lambda \bar{w} z}\,\mathrm{d}\,z \right| \leq \pi \cdot \left(\sup_{z \in \operatorname{Ran} \gamma_r} |f(z)| \right) \cdot \left| \mathrm{e}^{-\lambda \bar{w} a} \right| \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda r}}{\lambda}$$

teljesül. (*Jordan-lemma.*)

II. Legyen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan valós együtthatós polinom, melyre $\deg q \geq 2 + \deg p$ teljesül, valamint a q polinomnak nem létezik valós gyöke. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}\,x = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}:\ q(a)=0, \\ \operatorname{Im} a > 0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}, a \right).$$

III. Legyen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan valós együtthatós polinom, melyre $\deg q \geq 1 + \deg p$ teljesül, valamint a q polinomnak nem létezik valós gyöke. Igazoljuk, hogy ekkor minden $\alpha \in]0, 2\pi[$ esetén

$$\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(\alpha x)\ \mathrm{d}\,x + \mathrm{i} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(\alpha x)\ \mathrm{d}\,x = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}:\ q(a)=0, \\ \operatorname{Im} a > 0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}, a \right).$$

IV. Legyen $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan páros, valós együtthatós polinom, melyre $\deg q \geq 2 + \deg p$ teljesül, valamint a q polinomnak nem létezik valós gyöke. Igazoljuk, hogy ekkor minden $\alpha \in]-1, 1[$ esetén

$$\fint_{0}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} x^\alpha\ \mathrm{d}\,x = \frac{\pi\,\mathrm{i}}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \cdot \exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\pi\alpha}{2} \right) \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}:\ q(a)=0, \\ \operatorname{Im} a > 0}} \operatorname{Res}\left(z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)} z^\alpha, a \right).$$

[1]Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, mely minden $a \in \mathbb{R}^+$ esetén Riemann-integrálható a $[-a, a]$ intervallumon és létezik a $\lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} f$ határérték, akkor bevezetjük a

$$\fint_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} f$$

jelölést, melyet az *f függvény főérték integráljának* nevezünk.

V. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{6}$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{8}$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{4}$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+4)^3} \,\mathrm{d}\, x = \frac{3\pi}{512}$

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{4}$

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{24}$

8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^8+1} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{8\sin\frac{3\pi}{8}}$

VI. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi\,(2\,\mathrm{e}-1)}{12\,\mathrm{e}^2}$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin(2x)}{x^2+3} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{2}\cdot \mathrm{e}^{-2\sqrt{3}}$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\sin x\cos x}{(x^2+1)^2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{4\,\mathrm{e}^2}$

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi\,(4-\mathrm{e})}{6\,\mathrm{e}^2}$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{x^2+\frac{\pi^2}{4}} \,\mathrm{d}\, x = \mathrm{e}^{-\pi}$

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{4\,\mathrm{e}}$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2-2x+2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{\mathrm{e}}\cos 1$

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2+2x+2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi(\sin 1+\cos 1)}{\mathrm{e}}$

VII. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket, ahol $\alpha \in \,]-1,1[$ paraméter.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2+1} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x^2+4)^2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{2^{\alpha-5}\pi(1-\alpha)}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^3+1} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{3\sin\frac{\pi(1+\alpha)}{3}}$

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2+\alpha}}{(x^2+1)^2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi(\alpha+1)}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^4+1} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi(1+\alpha)}{4}}$

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{4+\alpha}}{(x^2+1)^3} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi(\alpha+1)(\alpha+3)}{16\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$