Analízis 2, 11–12. hét

Laurent-sorfejtés

I. Határozzuk meg az $f(z)$ függvények z_0 pont körüli Laurent-sorfejtését minden lehetséges tartományon.

1. $f:\mathbb{C}\setminus\{-1\}\to\mathbb{C}$ $\quad z\mapsto \dfrac{1}{z+1}$ $\quad z_0=\mathrm{i}$
2. $f:\mathbb{C}\setminus\{-1,\mathrm{i}\}\to\mathbb{C}$ $\quad z\mapsto \dfrac{1}{(z+1)(z-\mathrm{i})}$ $\quad z_0=\mathrm{i}$
3. $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ $\quad z\mapsto \mathrm{e}^z+\dfrac{1}{z}$ $\quad z_0=2$

II. Tekintsük az $f:\mathbb{C}\setminus\{-1\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z+1)^3}$ függvényt.

1. Írjuk fel a függvény $z_0=-1$ pont körüli Laurent-sorát.
2. Vizsgáljuk meg a szingularitás jellegét és adjuk meg a függvény reziduumát a szinguláris pontban.
3. Számoljuk ki a $\displaystyle\oint_{\gamma_{-2,2}} f$ és a $\displaystyle\oint_{\gamma_{-5,1}} f$ integrál értékét, ahol $\gamma_{c,r}$ jelöli a $c\in\mathbb{C}$ középpontú $r\in\mathbb{R}^+$ sugarú körvonalat egyszeres pozitív körüljárással.

III. Tekintsük az $f:\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i},1\}$, $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)(z-1)^4}$ függvényt.

1. Hol és milyen szingularitása van f-nek?
2. Írjuk fel az f függvény $z_0=1$ bázispontú azon Laurent-sorfejtését, mely a bázispont közvetlen környezetében konvergens. Adjuk meg a sor konvergencia gyűrűjét.
3. Számoljuk ki a $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)$ és a $\operatorname*{res}_{z=-\mathrm{i}} f(z)$ reziduumot.
4. Számoljuk ki a $\displaystyle\oint_{\gamma_{0,3}} f$ integrál értékét, ahol $\gamma_{c,r}$ jelöli a $c\in\mathbb{C}$ középpontú $r\in\mathbb{R}^+$ sugarú körvonalat egyszeres pozitív körüljárással.

IV. Tekintsük az $f,g:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}\left(z^2\right)-z^2}{4z^7}$ és $g(z)=\dfrac{\operatorname{ch}\left(z^3\right)-1}{7z^9}$ függvényeket.

1. Írjuk fel az f és a g függvény $z_0=0$ bázispontú azon Laurent-sorfejtését, mely a bázispont közvetlen környezetében konvergens. Adja meg a sor konvergencia gyűrűjét.
2. Hol és milyen szingularitása van az f illetve a g függvénynek? Adjuk meg a függvények szinguláris pontjaiban a reziduumát.
3. Számoljuk ki a $\displaystyle\oint_{\gamma_{0,2}} f$ és a $\displaystyle\oint_{\gamma_{3,2}} f$ integrál értékét, ahol $\gamma_{c,r}$ jelöli a $c\in\mathbb{C}$ középpontú $r\in\mathbb{R}^+$ sugarú körvonalat egyszeres pozitív körüljárással.