Analízis 2, 9–10. hét

Reziduum-számítás

I. Igazolja az alábbi $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ függvények 0 pontbeli reziduumára vonatkozó összefüggéseket.

1. $f(z) = \dfrac{1}{z+z^2}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = 1$.
2. $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = \dfrac{-1}{2}$.
3. $f(z) = \dfrac{z-\sin z}{z^4}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = \dfrac{1}{6}$.
4. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{z^4(1-z^2)}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = \dfrac{7}{6}$.
5. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ctg} z}{z^4}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = \dfrac{-1}{45}$.
6. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\ln(1+z)}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = 1$.
7. $f(z) = \operatorname{cth} z$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = 1$.
8. $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^4+z^5}$, $\quad \mathrm{Res}_f(0) = -1$.

II. Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legalább elsőfokú polinom és $a \in \mathrm{Dom}\, f$ a p polinom m-szeres multiplicitású gyöke. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\mathrm{Res}_{\frac{f}{p}}(a) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\, z^{m-1}} \left(\frac{(z-a)^m f(z)}{p(z)} \right)$$

Rouché-tétel

I. Hány egynél nem nagyobb abszolútértékű gyöke van a $p(z) = z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$ és a $q(z) = 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9$ polinomnak multiplicitással számolva?

II. Hány kettőnél nem nagyobb abszolútértékű gyöke van a $p(z) = z^4 + 3z^3 + 6$ és a $q(z) = z^4 - 2z^3 + 9z^2 + z - 1$ polinomnak multiplicitással számolva?

III. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}$. Mutassuk meg, hogy minden $R \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N \le n$ számra a p_n polinom gyökei a $B_R(0)$ halmazon kívül helyezkednek el.

Fourier-transzformáció egy sajátfüggvénye

I. Tekintsük az

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha t)}$$

függvényt, ahol $\alpha \in \mathbb{R}^+$ paraméter.

1. Legyen $b = \dfrac{\pi}{\alpha}$ és $z_0 = \dfrac{\mathrm{i}\,\pi}{2\alpha}$. Mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{C} \setminus \{z_0 + \mathrm{i}\,kb|\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(\alpha z)}$$

függvény mindenhol differenciálható.

2. Legyen $y \in \mathbb{R}$ és tekintsük az

$$f_y : \mathbb{C} \setminus \{z_0 + \mathrm{i}\,kb|\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,yz}\,\frac{1}{\mathrm{ch}(\alpha z)}$$

függvényt, melyről igazoljuk, hogy mindenhol differenciálható. Legyen $a \in \mathbb{R}^+$ paraméter és γ_1 a $-a$, a, $a + \mathrm{i}\,b$, $-a + \mathrm{i}\,b$, $-a$ pontsorozat által meghatározott egyenes szakaszokból álló törött vonal, továbbá legyen $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = z_0 + \dfrac{b}{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$. Mutassuk meg, hogy $\displaystyle\oint_{\gamma_1} f_y = \oint_{\gamma_2} f_y$ teljesül.

3. Legyen

$$g : B_{\frac{b}{2}}(z_0) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{\alpha z - \mathrm{i}\,yz} \cdot \dfrac{z - z_0}{\mathrm{e}^{2\alpha z} + 1}, & \text{ha} \quad z \neq z_0; \\ \dfrac{-\mathrm{i}}{\alpha} \exp\left(\dfrac{y\pi}{2\alpha}\right), & \text{ha} \quad z = z_0. \end{cases}$$

A $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$ határérték segítségével mutassuk meg, hogy a g függvény folytonos az értelmezési tartományán és differenciálható a $B_{\frac{b}{2}}(z_0) \setminus \{z_0\}$ halmazon. A megszüntethető szingularitások tétele alapján igazoljuk, hogy g differenciálható a $B_{\frac{b}{2}}(z_0)$ halmazon.

4. A Cauchy-integrálformula alapján igazoljuk az alábbi egyenlőséget.

$$\int_{\gamma_2} f_y = \int_{\gamma_2} \frac{g(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}\,z = 2\pi\,\mathrm{i}\,g(z_0) = \frac{2\pi}{\alpha} \exp\left(\frac{\pi y}{2\alpha}\right)$$

5. Tekintsük az alábbi görbéket.

$$\begin{aligned} l_1 &: [-a, a] \to \mathbb{C} & t &\mapsto t \\ l_2 &: [0, b] \to \mathbb{C} & t &\mapsto a + \mathrm{i}\,t \\ l_3 &: [-a, a] \to \mathbb{C} & t &\mapsto -t + \mathrm{i}\,b \\ l_4 &: [0, b] \to \mathbb{C} & t &\mapsto -a + \mathrm{i}\,b - \mathrm{i}\,t \end{aligned}$$

A $\displaystyle\oint_{\gamma_2} f_y$ intergált a $\displaystyle\oint_{\gamma_2} f_y = \sum_{k=1}^{4} \int_{l_k} f_y$ egyenlőség alapján számoljuk ki. Igazoljuk, hogy

$$\int_{l_1} f_y + \int_{l_3} f_y = \left(1 + \mathrm{e}^{yb}\right) \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,yt}\,\frac{1}{\mathrm{ch}(\alpha t)}\,\mathrm{d}\,t$$

$$\left|\int_{l_2} f_y + \int_{l_4} f_y\right| \leq \frac{4\,\mathrm{e}^{\alpha a}}{\mathrm{e}^{2\alpha a} - 1} \cdot \varphi(y)$$

teljesül, ahol

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad y \mapsto \begin{cases} \left|\dfrac{\mathrm{sh}(yb)}{y}\right|, & \text{ha} \quad y \neq 0; \\ b, & \text{ha} \quad y = 0. \end{cases}$$

6. Igazoljuk, hogy

$$\oint_{\gamma_2} f_y = \left(1 + \mathrm{e}^{yb}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, yt} \frac{1}{\mathrm{ch}(\alpha t)} \,\mathrm{d}\, t.$$

7. Igazoljuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, yt} \frac{1}{\mathrm{ch}(\alpha t)} \,\mathrm{d}\, t = \frac{\pi}{\alpha} \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\frac{yb}{2}\right)} \ .$$

8. Igazoljuk, hogy a $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} t\right)}$ függvényre minden $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, yt} h(t) \,\mathrm{d}\, t = h(y)$$

teljesül. (Ezt úgy is kifejezhetünk, hogy a h függvény a *Fourier-transzformáció* sajátfüggvénye.)