Analízis 2, 7–8. hét

Cauchy-féle integrálformula következményei

I. Igazoljuk az

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p\cos x+p^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2\pi}{1-p^2}$$

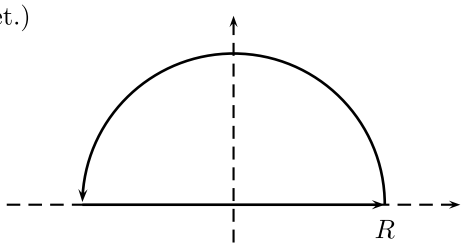
egyenlőséget, ahol $p \in]0,1[$.
(Útmutatás: A $z = \mathrm{e}^{x\,\mathrm{i}}$ helyettesítéssel az integrált körintegrállá lehet transzformálni.)

II. Igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}^+$ számra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}\,x = \frac{3\pi}{8a^5}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi\,\mathrm{e}^{-a}}{2a}$$

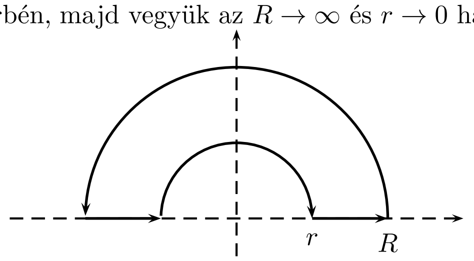
teljesül.
(Útmutatás: Adott $R \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén írjuk fel az ábrán látható görbementi integrált, majd vegyük az $R \to \infty$ határértéket.)



III. Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}^+$ paraméterre

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}(b-a)$$

teljesül.
(Útmutatás: Legyen $r \in]0, \min(a,b)[$, $R \in]\max(a,b), \infty[$, és az $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,bz}}{z^2}$ függvényt integráljuk az ábrán látható görbén, majd vegyük az $R \to \infty$ és $r \to 0$ határértéket.)



IV. Legyen $p \in]0,1[$, bizonyítsuk be az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1+e^x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

egyenlőséget.

(Útmutatás: Legyen $R \in \,]p, \infty[$ és integráljuk az $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{pz}}{1 + \mathrm{e}^{z}}$ függvényt az ábrán látható görbén, majd vegyük az $R \to \infty$ határértéket.)