Analízis 2, 5–6. hét

Cauchy-féle integrálformula

I$^{\mathrm{A}}$. Minden $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex számra és $R \in \mathbb{R}^+$ paraméterre legyen

$$\gamma_{z_0,R} : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto z_0 + R\,\mathrm{e}^{2\pi t\,\mathrm{i}}\,.$$

A Cauchy-féle integrálformula segítségével számoljuk ki az alábbi körintegrálokat!

1. $\displaystyle\oint\limits_{\gamma_{-\mathrm{i},1}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z^2}}{z^2+9}\,\mathrm{d}\,z$ 2. $\displaystyle\oint\limits_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z} + z\cos z^2\,\mathrm{d}\,z$ 3. $\displaystyle\oint\limits_{\gamma_{2\,\mathrm{i},3}} \frac{\sin \mathrm{i}\,z}{(z-1)(z^2+4)}\,\mathrm{d}\,z$

4. $\displaystyle\oint\limits_{\gamma_{0,4}} \frac{z^2+3}{z(z-2)^3}\,\mathrm{d}\,z$ 5. $\displaystyle\oint\limits_{\gamma_{1,3}} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}-1}{(z-\mathrm{i})z}\,\mathrm{d}\,z$ 6. $\displaystyle\oint\limits_{\gamma_{-1,3}} \frac{\sin z}{z(z-\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}\,z$

(Útmutatás: Használjuk fel, hogy ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan differenciálható függvény, melyre $\mathrm{Dom}\, f$ konvex és $\mathrm{Ran}\,\gamma_{z_0,R} \subseteq \mathrm{Dom}\, f$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra és $w \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Ran}\,\gamma_{z_0,R}$ paraméterre

$$\frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint\limits_{\gamma_{z_0,R}} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z = \begin{cases} f^{(n)}(w) & \text{ha} \quad |w-z_0| < R, \\ 0 & \text{ha} \quad |w-z_0| > R \end{cases}$$

teljesül.)

II$^{\mathrm{A}}$. Számoljuk ki a következő körintegrálokat, ahol csak a γ szakszonként folytonosan differenciálható görbe képét adtuk meg, azzal a konvencióval, hogy a γ görbe egyszer kerüli meg a 0 pontot pozitív irányítással.

1. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|+|z+1|=4} \frac{\sin z}{(z-5\,\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}\,z$ 2. $\displaystyle\oint\limits_{|\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|=1} \frac{\cos z}{4z-3-3\,\mathrm{i}}\,\mathrm{d}\,z$ 3. $\displaystyle\oint\limits_{\max\{|\mathrm{Re}\, z|,|\mathrm{Im}\, z|\}=1} \frac{\cos z}{4z-3-3\,\mathrm{i}}\,\mathrm{d}\,z$

III$^{\mathrm{A}}$. Számoljuk ki a következő körintegrálokat, ahol γ az origót pozitív irányba egyszer megkerülő 3 egység sugarú kör.

1. $\displaystyle\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}\,z$ 2. $\displaystyle\oint\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z+1)^4}\,\mathrm{d}\,z$ 3. $\displaystyle\oint\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{ch}(z^2)}{z^2(z^2+4)}\,\mathrm{d}\,z$

IV$^{\mathrm{A}}$. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ és $M = \sup\{|p(z)| \mid |z| = 1\}$. Igazoljuk, hogy minden $k \in \{0, \ldots, n\}$ esetén $|a_k| \leq M$ teljesül.