

Vizsgakövetelmény

Normált algebrák elemei

Alapfogalmak

1. Algebra, egységelemes algebra, standard egységelemesítés.
2. Ideál, reguláris ideál.
3. Spektrum.
4. Karakter, Gelfand-transzformáció, Gelfand-topológia a karaktertéren.
5. Normált algebra, Banach-algebra.
6. Spektrálsugár.
7. Az involúció.
8. *-algebra, normált *-algebra, Banach *-algebra, pre- C^* -algebra, C^* -algebra.
9. Projektorok, valamint normális, önadjungált és pozitív elemek *-algebrában.
10. A \leq reláció az önadjungált elemek halmazán a *-algebrában.
11. Unitér elemek egységelemes *-algebrában.
12. Approximatív egységelemes normált algebrák.
13. *-algebrán értelmezett funkcionál; pozitív, önadjungált, reguláris funkcionál.
14. Háló definíciója a \leq rendezéssel illetve a \wedge, \vee művelettel.
15. Ortokomplementáció hálón.
16. Korlátos, disztributív és ortomoduláris háló fogalma.

Alaptételek

1. Algebra egységelemesítésének unvierzalitása.
2. Jacobson-lemma.
3. Gelfand–Mazur-tétel.
4. A spektrum tulajdonságai egységelemes Banach-algebrában.
5. A C^* -norma egyértelműsége.
6. Gelfand–Naimark I. tétele.
7. A folytonos függvényszámítás tétele.
8. Pozitív elemek jellemzése egységelemes C^* -algebrában.

Az alaptételek

Forrás: **Kristóf János: A matematikai analízis elemei IV**

Algebra egységelemesítésének univierzalitása.

Legyen A algebra a K test felett.

- Létezik olyan B egységelemes algebra K felett, és olyan $j : A \rightarrow B$ algebra-morfizmus, amelyre teljesül az, hogy minden C egységelemes algebrához, és minden $\pi : A \rightarrow C$ algebra-morfizmusához egyértelműen létezik olyan $\tilde{\pi} : B \rightarrow C$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, hogy $\tilde{\pi} \circ j = \pi$.
- Legyenek (B_1, j_1) és (B_2, j_2) olyan párok, hogy B_1 és B_2 egységelemes algebrák a K test felett, $j_1 : A \rightarrow B_1$ és $j_2 : A \rightarrow B_2$ algebra-morfizmusok, és minden C egységelemes algebrához, valamint minden $\pi_1 : A \rightarrow C$ és $\pi_2 : A \rightarrow C$ algebra-morfizmusához egyértelműen létezik olyan $\tilde{\pi}_1 : B_1 \rightarrow C$ és $\tilde{\pi}_2 : B_2 \rightarrow C$ egységelem-tartó algebra-morfizmusok, hogy $\tilde{\pi}_1 \circ j_1 = \pi_1$ és $\tilde{\pi}_2 \circ j_2 = \pi_2$. Ekkor létezik egyetlen olyan $\pi : B_1 \rightarrow B_2$ algebra-morfizmus, amelyre $\pi \circ j_1 = j_2$, és ez a leképezés algebra-izomorfizmus.

Jacobson-lemma.

- Ha A egységelemes algebra, akkor $a, b \in A$ esetén $\{0\} \cup \text{Sp}_A(ab) = \{0\} \cup \text{Sp}_A(ba)$.
- Ha A algebra a K test felett, akkor $a, b \in A$ esetén $\text{Sp}'_A(ab) = \text{Sp}'_A(ba)$.

Gelfand–Mazur-tétel.

Ha A olyan egységelemes komplex normált algebra, amelyben minden nem nulla elem invertálható, akkor $A = \mathbb{C} \cdot 1$.

A spektrum tulajdonságai egységelemes Banach-algebrában.

Legyen A egységelemes Banach-algebra \mathbb{K} -felett és $a \in A$.

- Az $\text{Sp}_A(a)$ halmaz kompakt \mathbb{K} -ban és $\text{Sp}_A(a) \subseteq \overline{B}_{\rho(a)}(0; \mathbb{K})$. Továbbá, az a elem rezolvens-függvénye végtelenben eltűnő és \mathbb{K} -analitikus.
- Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor $\rho(a) = \min\{r \in \mathbb{R}^+ \mid \text{Sp}_A(a) \subseteq \overline{B}_r(0; \mathbb{C})\}$ (ez a spektrálsugár *minimalitási tulajdonsága*), és ha $A \neq \{0\}$, akkor $\text{Sp}_A(a) \neq \emptyset$.

A C^ -norma egyértelműsége.*

Ha A $*$ -algebra, akkor legfeljebb egy olyan norma létezik A felett, amellyel A C^* -algebra.

Gelfand–Naimark-tétel.

- (*Első Gelfand–Naimark-tétel.*) Ha A kommutatív C^* -algebra, akkor a

$$\mathcal{G}_A : A \rightarrow \overline{C_0(X(A); \mathbb{C})}$$

Gelfand-reprezentáció $*$ -izomorfizmus.

A folytonos függvényszámítás tétele.

Legyen A egységelemes C^* -algebra és $a \in A$ normális elem. Ekkor létezik egyetlen olyan

$$C_a : C(\text{Sp}_A(a); \mathbb{C}) \rightarrow A$$

egységelem-tartó $*$ -algebra-morfizmus, amelyre $C_a(\text{id}_{\text{Sp}_A(a)}) = a$. A C_a leképezés izometria és $\text{Im}(C_a)$ megegyezik az $\{a, 1\}$ halmaz által generált zárt $*$ -részalgebrával.

Pozitív elemek jellemzése egységelemes C^ -algebrában.*

Legyen A egységelemes C^* -algebra és $x \in A$ önadjungált elem. A következő állítások ekvivalensek.

- $\text{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, vagyis az x elem *pozitív spektrumú*.
- Létezik olyan $y \in A$ önadjungált elem, amelyre $x = y^2$.
- Létezik olyan $a \in A$, amelyre $x = a^*a$.
- $x \in A_+$, vagyis az x elem *pozitív*.

Továbbá, az A_+ halmaz zárt a C^* -norma szerint, és $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$ teljesül.