Vizsgatematika

Kalkulus 1, 2018/19 I. félév

A szóbeli vizsgán mindenki két tételt kap az alábbiakból; az elsőt részletesen kell ismertetni, a másodikból csak az alap definíciókat és a főbb tételeket kell elmondani.

1. Halmazelméleti alapok. Elemi halmazelméleti jelek és műveletek ($\in$, $\subseteq$, $\cap$, $\cup$, $\setminus$) Rendezett párok. Függvényszerű relációk. Injektív-, szürjektív- és bijektív függvények. Függvények kompozíciója. Műveletek. Halmazrendszer fogalma.

2. Rendezés és számosság. Rendezés. Lineáris és induktívan rendezett halmaz. Halmaz legnagyobb/legkisebb, maximális/minimális eleme, valamint infimuma és szuprémuma. Kuratowski–Zorn-lemma. Rendezett, teljesen rendezett és arkimédészi módon rendezett test. Véges, végtelen, megszámlálható és megszámlálhatóan végtelen halmaz.

3. A valós számok topológiája. A valós számok axiómái. Rendezett test, teljesen rendezett test, arkhimédészi módon rendezett test. Belső pont, határpont, torlódási pont, izolált pont. Nyílt, zárt, korlátos és kompakt halmaz. Halmaz belseje, halmaz lezártja. Cantor-féle közösrész-tétel. Sűrű halmaz. Borel–Lebesgue-tétel valós számokra. Bernoulli-egyenlőtlenség.

4. Sorozatok. A határérték és elemi tulajdonságai. Monoton, korlátos sorozat fogalma és tulajdonságai. Részsorozat. Torlódási pont jellemzése sorozatokkal. Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel. Bolzano–Weierstrass-tétel. $\liminf$, $\limsup$. Cauchy-sorozat, Cauchy-kritétium. Nevezetes határértékek: n^α, q^n, $\sqrt[n]{n}$, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

5. Sorok. Sor konvergenciája, és elemi tulajdonságai. Cauchy-kritérium. Sor abszolút konvergenciája. Majoráns/minoráns kritérium. Konvergencia-kritériumok: kondenzációs, gyök, hányados kritérium. Leibniz-sor. Feltétlen és feltételesen konvergens sorok. Cauchy-szorzat. Mertens-tétel. Abel-féle kritérium.

6. Elemi függvények. Hatványsor definíciója, konvergencia sugara és az elemi Cauchy–Hadamard-tétel. Elemi függvények (exp, sin, cos, sh, ch) definíciója. Az exp tulajdonságai. Euler-formula. A sin, cos alaptulajdonságai. Skaláris szorzás, Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.

7. Függvények jellemzői és határértéke. Páros, páratlan, (szigorúan) monoton növő és csökkenő, konkáv és konvex, periodikus függvény. Jensen-egyenlőtlenség. Függvény határértéke és a határérték tulajdonságai. Átviteli elv határértékre. Bal és jobb oldali határérték, kapcsolatuk a határértékkel.

8. Valós-valós függvények folytonossága. Függvény folytonossága, folytonos függvények halmazának zártsága a műveletekre nézve. Átviteli elv folytonosságra. A folytonosság topologikus jellemzése. Egyenletes folytonosság. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény tulajdonságai. A π definíciója, és a trigonometrikus függvények periodicitása.

9. A differenciálszámítás alapjai. A differenciálás fogalma, függvény deriváltja. A folytonosság kapcsolata a differenciálhatósággal. Differenciálás alaptulajdonságai. Középértéktételek: Rolle, Lagrange, Cauchy. L'Hospital-szabály. n-szer és végtelenszer differenciálható függvények. Folytonosan differenciálható függvények.

10. A differenciálszámítás alkalmazása. Konvexitás/konkavitás kapcsolata a deriválással. Taylor-polinom és Taylor-sorfejtés. Lokális szélsőérték fogalma és kapcsolta a függvény deriváltjával. Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség.

11. Határozatlan integrál. Határozatlan integrál fogalma és elemi határozatlan integrálok. Parciális és helyettesítéses integrálás. Parciális törtekre bontás. Racionális törtfüggvények integrálása.

12. Határozott integrálás. Korlátos intervallumok hossza. Intervallum felosztása. Alsó és felső közelítő összeg. Korlátos függvény alsó és felső integrálja. Riemann-integrálhatóság definíciója.

13. A Riemann-integrálhatóság kritériumai. Riemann-integrál tulajdonságai. Oszcillációs összeg. A Riemann-integrálható függvények. Newton–Leibniz-formula. Integrálfüggvény és tulajdonságai. A Riemann-integrál alkalmazásai (ívhossz, terület, felszín, térfogat és ezen alakzatok súlypontjának a kiszámítására). Improprius integrál.