

Kalkulus 1, 14 .hét

Határozott integrál alkalmazásai Elmélet

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$ és $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^+)$.

I. Az $A_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, 0 \leq y \leq f(x)\}$ síkbeli alakzat

területe: $T_f = \int_I f(x) \, dx$;

súlypontja: $x_s(A_f) = \frac{\int_I xf(x) \, dx}{\int_I f(x) \, dx}$, $y_s(A_f) = \frac{\int_I f(x)^2 \, dx}{2 \int_I f(x) \, dx}$.

II. A $\gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y = f(x)\}$ görbe

ívhossza: $L_f = \int_I \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$;

súlypontja: $x_s(L_f) = \frac{1}{L_f} \int_I x \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$, $y_s(L_f) = \frac{1}{L_f} \int_I f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$.

III. Az $\Omega_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in I, \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$ forgástest

felszíne: $F_f = 2\pi \int_I f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$

térfogta: $V_f = \pi \int_I f^2(x) \, dx$

súlypontja: $x_s(\Omega_f) = \frac{1}{V_f} \pi \int_I xf(x)^2 \, dx$, $y_s(\Omega_f) = 0$, $z_s(\Omega_f) = 0$.