

Kalkulus 1.
1. zárthelyi dolgozat
 2018. 10. 17. 10.15-11.45

Név:
 Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Σ:

1. Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. (5,5 p.)

a.) Mutassa meg, hogy $(A \cap B) \setminus (A \setminus C) = A \cap B \cap C$.

b.) Mutassa meg, hogy $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

2. Legyen $X = \mathbb{R}^2$ és definiáljuk a \preceq relációt az X halmazon az alábbi módon. (4,3,3 p.)

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$$

a.) Mutassa meg, hogy \preceq rendezés.

b.) Tekintsük a $H = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 0)\} \subseteq X$ halmazt. Adja meg a H halmaz minimális és a legnagyobb elemét, ha az létezik.

c.) Adja meg a H halmaz szuprémumát, ha az létezik.

3. Legyen $A = \{-2^n | n \in \mathbb{N}\} \cup ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \cup]4, \infty[\subseteq \mathbb{R}$. (6,3,1 p.)

a.) Adja meg az A halmaz belső, torlódási és izolált pontjainak a halmazát.

b.) Határozza meg az $\text{Int } A$ és az \overline{A} halmaz elemeit.

c.) Kompakt-e az \overline{A} halmaz?

4. Számolja ki az alábbi határértékeket. (4×5 p.)

a.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{4n^4 + 3n^3 - 2n^2 + 1}$

b.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^2 + 2n} - \sqrt{4n^2 + 1}}{n^{2n+4}}$

c.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3} \right)^{2n+4}$

d.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n(n^2+2) + 5^n}{2^{2n+2}n + 4^n n^4 - 12}}$

5. Határozza meg a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+i)^k + i(1-i)^k}{2^k}$ sor összegét, ha konvergens a sor. (5 p.)

6. Igazolja, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $6 + \sum_{k=0}^n 2^k k^2 = 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3)$ (5 p.)
 teljesül.