

Kalkulus 1.
1. pótzárthelyi dolgozat
2018. 10. 30. 17.15-18.45

Név:
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Σ:

1. Legyen A, B és C halmaz, valamint $(X_i)_{i \in I}$ halmazrendszer. Igazolja az alábbi egyenlőségeket. (5+5 p.)

a.) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

b.) $A \setminus \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \setminus X_i)$

2. Legyen $X = \mathbb{R}^2$ és definiáljuk a \simeq relációt az X halmazon az alábbi módon. (4,3,3 p.)

$$(x_1, y_1) \simeq (x_2, y_2) \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad y_1 + x_2^2 = y_2 + x_1^2$$

a.) Mutassa meg, hogy \simeq ekvivalenciareláció.

b.) Adja meg az $a = (1, 2)$ elem ekvivalenciosztályát, vagyis az a / \simeq halmaz elemeit.

c.) Adja meg az X / \simeq halmaz elemeit.

3. Mutassa meg, hogy minden $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ esetén (10 p.)

$$\inf(AB) = (\inf A) \cdot (\inf B)$$

teljesül.

4. Legyen $f : A \rightarrow B$ függvény (azaz $\text{Dom } f = A$ nem feltétlenül teljesül). (10 p.)

Igazolja, hogy ha $X_1, X_2 \subseteq B$, akkor $f^{-1}(X_2 \setminus X_1) = f^{-1}(X_2) \setminus f^{-1}(X_1)$.

5. Mutassa meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ esetén (10 p.)

$$a + b + c \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

6. Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter esetén lesz a $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$ határérték véges, nem nulla szám? Mi lesz, ekkor a fenti határérték? (10 p.)