# Kalkulus 1, 14. hét

## Határozott integrál

I. Keressünk hibát az alábbi parciális integráláson alapuló számításban.

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} \, \mathrm{d}\, x = \log x \cdot \frac{1}{\log x} - \int \log x \cdot \frac{-1}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}\, x = 1 + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} \, \mathrm{d}\, x$$

$$0 = 1$$

II. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

1. $\int_0^1 x \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}\, x = 1$
3. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{3}$
4. $\int_1^2 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}\, x = \ln 2$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}$
6. $\int_0^1 (1-2x)^{19} \, \mathrm{d}\, x = 0$
7. $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{6}$
8. $\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}\, x = 1 + \ln \frac{2}{1+\mathrm{e}}$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} \, \mathrm{d}\, x = 1$

III. Legyen $f \in C([0,\pi],\mathbb{R})$ és mutassuk meg, hogy ekkor $\int_0^{\pi} f(\sin x) \cos x \, \mathrm{d}\, x = 0$.

IV. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^{4x} \sqrt{1+t^8} \, \mathrm{d}\, t$ és $g(x) = \int\limits_{\sin x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \, \mathrm{d}\, t$. Határozzuk meg az $f$ és $g$ függvény deriváltját!

V. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) \, \mathrm{d}\, t}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} \, \mathrm{d}\, t}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} \, \mathrm{d}\, t}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} \, \mathrm{d}\, t}{x^3}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{2x} \operatorname{arctg} 3t \, \mathrm{d}\, t}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} \, \mathrm{d}\, t}{\frac{1}{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 \, \mathrm{d}\, t}{\sqrt{x^2+1}}$

VI. Számoljuk ki a következő improprius integrálokat, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ paraméter.

1. $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \, \mathrm{d}\, x$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} \, \mathrm{d}\, x$
3. $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos(bx) \, \mathrm{d}\, x$
4. $\int_1^{\infty} \frac{1}{2^x - 1} \, \mathrm{d}\, x$
5. $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2} \, \mathrm{d}\, x$
6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} \, \mathrm{d}\, x$

7. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}\,x$ 8. $\displaystyle\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}\,x$ 9. $\displaystyle\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}\,x$

VII. Konvergensek-e az alábbi integrálok?

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin 2x}\,\mathrm{d}\,x$ 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin 2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$ 3. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}\,x$

4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}\,x$ 5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{1-x})^3}\,\mathrm{d}\,x$ 6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos^2(x^5+3)}{x^4+3x^2+5}\,\mathrm{d}\,x$

7. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$ 8. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x}-\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$ 9. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{2x^2+\sin x}\,\mathrm{d}\,x$

10. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sqrt{x+x^3}}\,\mathrm{d}\,x$ 11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2\left(+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2x}(1+\sqrt{x})^3}\,\mathrm{d}\,x$ 12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}\,x$

## Haladóbb feladatok

I. Számoljuk ki az alábbi integrálok értékét.

$$\int_0^\pi \log\sin x\,\mathrm{d}\,x \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,\mathrm{d}\,x \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\,\mathrm{d}\,x$$

II. Igazoljuk, hogy minden $a\in\mathbb{R}^+$ paraméter esetén

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{ak}{n}\right)}=\frac{(1+a)^{1+\frac{1}{a}}}{\mathrm{e}}.$$

III. Legyen $f\in\mathcal{R}([0,1],\mathbb{R})$ olyan függvény, melyhez létezik olyan $c\in\mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x\in[0,1]$ esetén $f(x)\geq c$ teljesül. Keressük meg a

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

határértéket.

IV. Számoljuk ki a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ és a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ határértéket.

V. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n.$

1. Igazoljuk, hogy $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, valamint minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ esetén $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $I_n \geq I_{n+1}$.
3. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$I_{2n}^2 \geq I_{2n} I_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)} \geq I_{2n+2}^2 \ .$$

4. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n-1}} \geq I_{2n} \sqrt{2n} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} \ .$$

5. Igazoljuk a *Wallis-formulát.*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \sqrt{\pi}$$

VI. Tekintsük az alábbi sorozatot.

$$a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

1. Mutassuk meg, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

2. Igazoljuk, hogy az $a$ sorozat monoton fogyó.
3. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\log n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}\, x \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$$

teljesül.

4. Mutassuk meg, hogy az $a$ sorozat alulról korlátos.

(A

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

számot *Euler–Mascheroni-állandónak* nevezzük, $\gamma \approx 0.5772156649$.)