

# Kalkulus 1, 11. hét

## Differenciálszámítás I.

I. Deriváljuk a következő függvényeket és hozzuk egyszerűbb alakra a deriváltakat!

1.  $f(x) = \frac{x^2 - x}{5}$
2.  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} \sqrt[3]{x}}$
3.  $f(x) = \sqrt[4]{3x - 2x^2}$
4.  $f(x) = e^x(1 + x^2)$
5.  $f(x) = \frac{\sin x}{x + \cos x}$
6.  $f(x) = \sin^3 x$
7.  $f(x) = \sin^4 3x^2$
8.  $f(x) = \sin \log x$
9.  $f(x) = \log \sqrt{\cos x}$
10.  $f(x) = \log \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$
11.  $f(x) = \log \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x}$
12.  $f(x) = \frac{\sin x}{x} \operatorname{arctg} x$
13.  $f(x) = x^{\operatorname{tg} x}$
14.  $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$
15.  $f(x) = (ax + b)^{cx+d}$
16.  $f(x) = \log \sin \cos x^2$
17.  $f(x) = \frac{x^2}{2} \left( \log x - \frac{1}{2} \right)$
18.  $f(x) = \frac{\sin(x) \log(1 + \cos^2 x^3)}{x}$

II. Keressük meg az  $f = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}^2 \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$  és a  $g = \sqrt[5]{\operatorname{id}_{\mathbb{R}}^2 \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{id}_{\mathbb{R}}^3)}$  függvény deriváltját.

III. Tegyük folytonossá az alábbi függvényt a 0 pontban, és számoljuk ki a deriváltját.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

IV. Mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény minden pontban differenciálható, azonban az  $f'$  függvény nem folytonos.

V. Legyen  $I \subseteq \mathbb{R}$  nyílt intervallum, és legyen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  olyan differenciálható függvény, melynek a deriváltja korlátos. Igazoljuk, hogy ekkor  $f$  egyenletesen folytonos az egész  $I$  intervallumon.

VI. Adjuk meg az alábbi  $f(x)$  függvények  $x_0$  pontbeli érintőjének az egyenletét.

1.  $f(x) = x^2 \quad x_0 = 4$
2.  $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad x_0 = 2$
3.  $f(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2} \quad x_0 = \frac{1}{2}$
4.  $f(x) = \sin x^2 \quad x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$