# Kalkulus 1, 10. hét

## Függvények határértéke II.

I. Számoljuk ki az alábbi határértékeket, ha azok léteznek.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{3x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+2x}}{\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(5x)}{\cos(4x)-\cos(6x)}$

II. Számoljuk ki az alábbi határértékeket, ha azok léteznek, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{4x}-1}{3x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{5x}-\cos x}{\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{5x}-\cos x-\sin(5x)}{x\sin(x)}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{ax}-1-ax}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{ax}-\cos(bx)-\sin(bx)}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch}(ax)+\cos(ax)-2}{x^4}$

III. Legyen $a, b \in \mathbb{R}^+$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt[x]{\frac{a^x+b^x}{2}} = \sqrt{ab} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

teljesül.

## Bolzano-tétel következményei

I. Bolzano-tétel következményei.

1. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan fokszámú polinomnak van zérushelye.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\operatorname{Ran} f = [a, b]$, akkor létezik olyan $x_0 \in [a, b]$, amelyre $f(x_0) = x_0$.
3. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $x_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, melyre $x_0 \sin x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.
4. Legyen $f \in C([0, 2], \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $u, v \in [0, 2]$, melyre
$$v - u = 1 \qquad \text{és} \qquad f(v) - f(u) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$
5. Igazoljuk, hogy minden pillanatban van olyan pont a Földön, ahol ugyanakkora a hőmérséklet, mint a vele átellenes pontban.
6. Igazoljuk, hogy egy négyzet alakú asztalt minden folytonos felületű padlón el lehet úgy forgatni a középpontja körül, hogy egyszerre mind a négy lába a padlón álljon.

## Egyenletes folytonosság

I. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \dfrac{1}{x}$, a $g(x) = x^2$ és a $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ függvény a $]0,1]$, $[1,2]$ és a $]0,\infty[$ intervallumon?

II. Bizonyítsuk be, hogy a sin és a cos függvény egyenletesen folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon, valamint az $\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ és a $\sin\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ függvény nem egyenletesen folytonos a $]0,1[$ intervallumon.

III. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f \in C([a,\infty[\,,\mathbb{R})$ olyan függvény, melyre $\lim\limits_{\infty} f \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy ekkor $f$ egyenletesen folytonos az egész $[a,\infty[$ halmazon.

## Trigonometrikus függvények inverze

I. Igazoljuk a trigonometrikus függvényekre és inverzükre vonatkozó alábbi összefüggéseket.

1. $\sin x = \mathrm{sgn}(\cos x) \cdot \dfrac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}} \quad x \in \mathbb{R}$
2. $\cos x = \mathrm{sgn}(\cos x) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}} \quad x \in \mathbb{R}$
3. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \quad x \in [-1,1]$
4. $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\, x \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
5. $\mathrm{arctg}\, x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad x \in \mathbb{R}$
6. $\arcsin x = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in\, ]-1,1[$
7. $\mathrm{tg}(3\,\mathrm{arctg}\, x) = \dfrac{3x-x^3}{1-3x^2} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$