Kalkulus 1, 9. hét

Függvények határértéke I.

I. A határérték definíciójával igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(2x+4)=10$
2. $\lim\limits_{x\to -4}\sqrt{1-2x}=3$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{3x+2}=1$
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{2x^2-3x+4}=\infty$
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{x^2+2x}-x=1$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$

II. Számoljuk ki az alábbi határértékeket, ha azok léteznek.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$
2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^3+x}-x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-\sqrt{\dfrac{4x^3+3x^2}{4x-3}}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$
8. $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt[3]{x}\left((x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$
11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}-1}-\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}\right)$
12. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

Függvények konvexitása és folytonossága

I. Igazoljuk, hogy az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\cdot\chi_{\mathbb{Q}}$ függvény csak a 0 pontban folytonos.

II. Legyen $A=[-1,0]\cup\big(]0,1[\,\cap\,\mathbb{Q}\big)\cup\{3,4,5\}$ és legyen

$$f:A\to\mathbb{R}\qquad x\mapsto\begin{cases}0 & \text{ha}\quad x<2 \text{ és } x\notin\mathbb{Q},\\ x & \text{ha}\quad x<2 \text{ és } x\in\mathbb{Q},\\ 5 & \text{ha}\quad x=3,\\ 8 & \text{ha}\quad x=4 \text{ vagy } x=5.\end{cases}$$

Mely pontokban folytonos az f függvény?

III. Függvény konvexitása és folytonossága.

1. Legyen $I\subseteq\mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f:I\to\mathbb{R}$ konvex függvény az I intervallumon. Mutassuk meg, hogy ekkor az f függvény folytonos.
2. Legyen $I\subseteq\mathbb{R}$ intervallum és $f:I\to\mathbb{R}$ folytonos függvény. Igazoljuk, hogy az f függvény pontosan akkor konvex, ha minden $x_1,x_2\in I$ számra
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$
teljesül.

IV. Adott $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ esetén legyenek $p_x \in \mathbb{Z}$ és $q_x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ azon egyértelműen meghatározott számok, melyekre $x = \dfrac{p_x}{q_x}$, valamint p_x és q_x relatív prímek. Az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \notin \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ \dfrac{1}{q_x}, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \end{cases}$$

függvényt *Dirichlet-függvénynek* nevezzük. Igazoljuk, hogy a A Dirichlet-függvénynek

1. minden pontban létezik jobb- illetve bal oldali határértéke;
2. a 0 helyen és minden irracionális pontban folytonos;
3. minden $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ pontban szakadása van, úgy, hogy $\lim\limits_{a+} f = \lim\limits_{a-} f$.