Kalkulus 1, 8. hét

Leibniz-, abszolút és feltételesen konvergens sorok

I. A Leibniz-kritérium segítségével vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek illetve feltételesen konvergensek-e.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$
3. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\sqrt{n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$
6. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n}$

II. Becsüljük meg, hogy hányadik részletösszeg esetén lesz a sor összegére kapott becslés hibája 10^{-4}-nél kisebb!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2}{5^{2n}+3n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n+3}$$

III. Konvergensek, abszolút konvergensek illetve feltételesen konvergensek-e az alábbi sorok?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n+n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4-n}{4+n}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2+n3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt[3]{n^2+1}}$$

Hatványsorok

I. Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát és adjuk meg, hogy mely $x \in \mathbb{R}$ esetén lesznek konvergensek a sorok!

1. $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} x^n$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n} x^{2n}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!} (x+7)^n$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$
8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{9^n} (x-2)^{2n}$
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n$

Sorok szorzata

I. Tekintsük az $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = n$ és $b_n = 1$ sorozatokat. Igazoljuk, hogy Cauchy-szorzatukra minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(a * b)_n = \frac{n(n+1)}{2}$ teljesül.

II. Legyen $q \in]-1,1[$ és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = q^n$. Mutassuk meg, hogy $(a * a)_n = (n+1)q^n$ teljesül, és ennek segítségével igazoljuk a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}$$

formulát.

III. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ korlátos változású zérussorozat (azaz $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| < \infty$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$). Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_n (-1)^n a_n$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| .$$

IV. Igazoljuk, hogy a $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sor konverges, de önmagával vett Cauchy-szorzata már divergens.

V. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ korlátos változású zérussorozat, és legyen $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olyan, hogy $|q| = 1$. Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_n a_n q^n$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \frac{2}{|1-q|}.$$

VI. Fejezzük ki az alábbi sorösszegeket elemi függvényekkel $(\sin, \cos, \exp, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$.

1. $\frac{1}{0!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{12!} + \cdots = ?$
2. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{13!} + \cdots = ?$
3. $\frac{1}{2!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{14!} + \cdots = ?$
4. $\frac{1}{3!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{15!} + \cdots = ?$

VII. Mutassuk meg, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ és $q \in]-1,1[$ esetén

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \sin(kx) = \frac{q \sin x}{q^2 - 2q\cos x + 1} \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos(kx) = \frac{1 - q\cos x}{q^2 - 2q\cos x + 1}$$

teljesül.

Haladóbb feladatok

I. Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n-\log n}$ sor? ($\log = \ln$)

II. Adjuk meg, hogy mely $x \in \mathbb{R}$ értékek esetén lesznek a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}} x^n$$

sorok konvergensek!

III. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat, és legyen $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\cos x \neq 1$. Igazoljuk, hogy ekkor a $\displaystyle\sum_n a_n \sin(nx)$ sor konvergens, valamint

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx)\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos x}} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|\right).$$