Kalkulus 1, 7. hét

Elemi sorösszegek és geometriai sorok

I. Igazoljuk a sorokra vonatkozó alábbi összefüggéseket!

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} = 1$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+2n} = 3$
3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^3-n} = 1$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = 1$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}} = 1$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}(n+1) = -\frac{\pi}{4}$
8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\log 2$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3} = 1$

II. Konvergensek-e az alábbi sorok és ha igen, mi a határértékük?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{2^{2n}\,\mathrm{i}}$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+4\,\mathrm{i})^n}{4^n(1-\mathrm{i})^{2n}}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-4^n+5(-1)^n}{3^{2n}}$

Majoráns, minoráns, gyök- és hányadoskritérium

I. A majoráns, illetve minoráns kritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek, illetve melyek divergensek.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-8n^2+1}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-n+3}{2n^4+2n^2+7}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n+3}{2n^5+2n^2+7}$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-1}\right)$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

II. A gyökkritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5 4^{n+1}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$
5. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{9^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2} \frac{1}{3^{2n+1}}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+1}\right)^{n^3}$

10. $\sum_{n=4}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}$ 12. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\log^n n}$

III. A hányadoskritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{(n-1)!}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+n)^n}{(n+1)!}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{5^{3n} n!(n+1)!(n+2)!}$

Haladóbb feladatok

I. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}\right) = \ln\frac{2}{3}$.

II. Igazoljuk az alábbi végtelen szorzatokra vonatkozó egyenlőségeket.

1. $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \infty$ 2. $\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right) = 0$ 3. $\prod_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right) = 1$

4. $\prod_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^2-1}\right) = 2$ 5. $\prod_{k=3}^{\infty}\left(1-\frac{4}{k^2}\right) = \frac{1}{6}$ 6. $\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{k^2+k}\right) = \frac{1}{3}$

Speciális sorok konvergenciája

I. Legyen $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ konvergens sorozat. Mutassuk meg, hogy ekkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim a$.

II. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan monoton csökkenő zérussorozat, melyre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

III. Legyen $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ olyan sorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k = 0$.

IV. Mutassuk meg, hogy ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergens sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ teljesül, akkor a $\sum\limits_n \frac{a_n}{n}$ sor divergens.

V. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ korlátos változású sorozat, azaz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor az a sorozat konvergens.

VI. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Mutassuk meg, hogy ekkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

VII. Legyen $x \in \mathbb{C}$ $|x| < 1$, és tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $a_k = x^k$ sorozatot. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x^{n+1}}{x-1}n - \frac{x(x^n-1)}{(x-1)^2}$, valamint $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$;
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2x^k = \frac{x^{n+1}}{x-1}n^2 - \frac{2x^{n+1}}{(x-1)^2}n + \frac{x(1+x)(x^n-1)}{(x-1)^3}$, valamint $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$;
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3x^k = \frac{x^{n+1}}{x-1}n^3 - \frac{3x^{n+1}}{(x-1)^2}n^2 + \frac{3x^{n+1}(x+1)}{(x+1)^3}n - \frac{x(x^2+4x+1)(x^n-1)}{(x-1)^4}$, valamint $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^3x^n = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$

teljesül.