Kalkulus 1, 5. hét

Sorozatok definíció szerinti konvergenciája

I. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorozatok határértéke végtelen a definíció szerint, speciálisan adjunk meg egy küszöbindexet a $K = 100$ korláthoz.

1. $a_n = \sqrt{n^2 - n}$
2. $a_n = n^3 - 3n^2 + 3n - 5$
3. $a_n = \sqrt{n^4 + 2n^3}$
4. $a_n = \sqrt{n^4 - 5n^3}$

II. Mutassuk meg az alábbi határértékeket a definíció szerint, speciálisan adjunk meg egy küszöbindexet a $\varepsilon = 10^{-3}$ korláthoz.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n-3}{2n+1} = 4$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^2+3n-5}{2n^2+2n+2} = 3$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+\sqrt{n}+\sin n}{n+2} = 2$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n} - n = 1$

Speciális sorozatok konvergenciája I.

I. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3n+6}{3n^2-1}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!(5+2n)}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^2 + 3\sqrt{n} - 9\right)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-10n-2}{5n^3+2n^2+n+1}$

II. Keressük meg az alábbi gyökös kifejezések határértékét.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+5n} - \sqrt{2n^2-n}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4+2n^2+3} - \sqrt{n^4+n}\right)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n+3} - \sqrt{n^2+an+1}\right) \qquad (a \in \mathbb{R})$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^6+n^5} - \sqrt[3]{n^6-n^5}\right)$

III. Határozzuk meg az alábbi rekurzióval definiált sorozatok határértékét!

1. $a_{n+1} = 7 - \dfrac{10}{a_n}$, $a_1 = 4$
2. $a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3}$, $a_1 = 1$ és $a_1 = 5$
3. $a_{n+1} = \sqrt{a_n+2}$, $a_1 = 1$

IV. Legyen $a_0, a_1 = 1$, és minden $n \in \mathbb{N} \setminus 2$ esetén legyen

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

1. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$a_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

   teljesül.
2. Igazoljuk, hogy a

$$b : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \qquad n \mapsto \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

   sorozat olyan Cauchy-sorozat, mely nem konvergens a $\mathbb{Q}$ számtestben.

Haladóbb speciális sorozatok

I. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{m+n} \leq a_m a_n$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor az $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n} \ .$$

II. Igazoljuk a $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{(2+\sqrt{3})^n\right\} = 1$ határértéket, ahol $\{\cdot\}$ a törtrész függvényt jelöli!

III. Igazoljuk az alábbi határértékeket.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{kn}{n}} = \dfrac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$