Kalkulus 1, 4. hét

Valós számok elemi topológiája

I. Határozzuk meg az alábbi halmazok belső, torlódási, határ és izolált pontjait a valós számtest felett; döntsük el, hogy rendelkeznek-e a nyíltság, zártság, korlátosság, kompaktság tulajdonságokkal; valamint adjuk meg a lezártjukat és a belsejüket.

1. $A_1 = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$
2. $A_2 = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$
3. $A_3 = \,]-2,-1[\, \cup [2,3] \cup [4,\infty[$

II. Igazoljuk, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\overline{\{z \in \mathbb{R} |\ \ |x-z| < r\}} = \{z \in \mathbb{R} |\ \ |x-z| \leq r\}$$

teljesül.

III. Adjunk példát olyan $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazra, melyre $\operatorname{Int} \overline{A} = \mathbb{R}$ és $\overline{\operatorname{Int} A} = \emptyset$ teljesül.

IV. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Igazoljuk, hogy ekkor fennállnak az alábbi egyenlőségek.

$$\operatorname{Int} A = \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{R} \setminus A} \qquad\qquad \overline{A} = \mathbb{R} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A)$$

V. Adjunk példát olyan $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszerre, ahol

1. minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, korlátos halmaz, $A_{n+1} \subseteq A_n$ teljesül és $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$;
2. minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, zárt halmaz, $A_{n+1} \subseteq A_n$ teljesül és $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

VI. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $E_1, \ldots, E_n \subseteq \mathbb{K}$. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\operatorname{Int}\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k \right) = \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Int} E_k \quad \text{és} \quad \overline{\bigcup_{k=1}^{n} E_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{E_k}.$$

VII. Legyen I tetszőleges indexhalmaz és legyen minden $i \in I$ esetén $E_i \subseteq \mathbb{K}$. Bizonyítsuk be a következőket.

1. $\operatorname{Int}\left(\bigcap_{i \in I} E_i \right) \subseteq \bigcap_{i \in I} \operatorname{Int} E_i$
2. $\operatorname{Int}\left(\bigcup_{i \in I} E_i \right) \supseteq \bigcup_{i \in I} \operatorname{Int} E_i$
3. $\overline{\bigcap_{i \in I} E_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{E_i}$
4. $\overline{\bigcup_{i \in I} E_i} \supseteq \bigcup_{i \in I} \overline{E_i}$

Haladóbb feladatok

I. Határozzuk meg az alábbi halmazok belső, torlódási, határ és izolált pontjait a komplex számtest felett; döntsük el, hogy rendelkeznek-e a nyíltság, zártság, korlátosság, kompaktság tulajdonságokkal; valamint adjuk meg a lezártjukat és a belsejüket.

1. $A_1 = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+ \right\}$
2. $A_2 = \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}^+$
3. $A_3 = \left]-3, -2\right[\cup \{-2\,\mathrm{i}\} \cup [5, \infty[\cup B_2(1 + 3\,\mathrm{i})$

II. Mutassuk meg, hogy ha $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, mely zárt és nyílt, akkor $A = \emptyset$ vagy $A = \mathbb{R}$ teljesül.

III. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazról azt mondjuk, hogy *sehol sem sűrű*, ha $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$. Igazoljuk, hogy

1. az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha az $\mathbb{R} \setminus \overline{A}$ halmaz sűrű;
2. véges sok sehol sem sűrű halmaz uniója sehol sem sűrű.