Kalkulus 1, 3. hét

Infimum és szuprémum

I. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ nem üres alulról korlátos halmaz. Mutassuk meg, hogy

1. $-A$ felülről korlátos halmaz;
2. létezik $\inf A$;
3. $\inf A = -(\sup(-A))$ teljesül.

II. Legyen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nem üres felülről korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy $A \cup B$ is felülről korlátos, valamint $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ teljesül.

III. Legyen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nem üres felülről korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy $A + B$ is felülről korlátos, valamint $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$ teljesül.

IV. Legyen $A, B \subseteq \mathbb{R}_0^+$ nem üres felülről korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy AB is felülről korlátos, valamint $(\sup A)(\sup B) = \sup(AB)$ teljesül.

Binomiális tétel

I. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén teljesülnek az alábbiak.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Egyenlőtlenségek

I. Igazoljuk, hogy $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ számokra teljesülnek az alábbiak.

1. $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$
2. $6 \leq \dfrac{a+b}{c} + \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b}$
3. $(a + b + c)^2 \leq 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$
4. Ha $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, akkor $a + 2b + 3c + 4d \leq \sqrt{30}$.
5. $4(ad - bc)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

II. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ olyan, melyre $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor

$$2^n \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n).$$

III. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$a + b + c \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

IV. Mutassuk meg, hogy mindenn $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$n^2 \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right).$$

V. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$a + b + c + d \leq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a}.$$

Haladóbb egyenlőtlenségek

I. Mutassuk meg, hogy ha az $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számokra $abc = 1$ teljesül, akkor

$$a + b + c \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

II. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ esetén ha $a + b + c + d = 4$, akkor

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \leq \frac{4}{abcd}.$$

III. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számra

$$\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} \leq \frac{a + b + c}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}.$$

IV. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számra

$$4 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3\sqrt[3]{abc}}{a + b + c}.$$

V. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számra

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b}.$$

Halmazok számossága

I. Igazoljuk, hogy az alábbi halmazok kontinuum számosságúak.

1. $[a, b]$ és $]a, b[$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$;
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$;
3. $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_x$, ahol minden $x \in \mathbb{R}$ esetén A_x kontinuum számosságú.

II. Igazoljuk, hogy az alábbi halmazok kontinuum számosságúak.

1. $2\mathbb{N}$ (páros számok halmaza);
2. $2\mathbb{N} + 1$ (páratlan számok halmaza);
3. $\{2^k | \ k \in \mathbb{N}\}$;
4. $\{p \in \mathbb{N} | \ p \text{ prím}\}$.

III. Igazoljuk, hogy az egész együtthatós polinomok gyökeinek a halmaza (*algebrai egészek halmaza*) megszámlálható. Azaz

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R} | \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists a_0, .., a_n \in \mathbb{Z} : \ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \right\} \right| = |\mathbb{N}| \, .$$

Használjuk fel, hogy egy n-edfokú egyenletnek legfeljebb n különböző gyöke lehet.

IV. Igazoljuk, hogy az E halmaz pontosan akkor végtelen, ha minden $f : E \to E$ függvényhez létezik nem triviális ($A \neq \emptyset, A \neq E$) $A \subseteq E$ invariáns ($f(A) \subseteq A$) halmaz!

Haladóbb példák számosságra

I. Legyen E végtelen halmaz. Igazoljuk, hogy E véges részhalmazainak a halmaza azonos számosságú az E halmazzal, azaz

$$\left| \left\{ A \subseteq E \ \middle| \ |A| < |\mathbb{N}| \right\} \right| = |E|$$

teljesül. (Használjuk fel, hogy $|E| = |E \times E|$.)

II. Legyen E végtelen halmaz. Igazoljuk, hogy az E halaz E-vel ekvipotens (azonos számosságú) részhalmazainak a halmaza ekvipotens E hatványhalmazával, azaz

$$\left| \left\{ A \subseteq E \ \middle| \ |A| = |E| \right\} \right| = |\mathcal{P}(E)|$$

teljesül. (Használjuk fel, hogy $|E| = |E \times E|$.)