Kalkulus 1, 2. hét

Relációk

I. Legyen $R \subseteq X \times X$ reláció. Bizonyítsuk be a következőket.

1. Az R reláció pontosan akkor reflexív, ha $\mathrm{id}_X \subseteq R$.
2. Az R reláció pontosan akkor tranzitív, ha $R \circ R \subseteq R$.
3. Az R reláció pontosan akkor szimmetrikus, ha $\overset{-1}{R} = R$.
4. Az R reláció pontosan akkor antiszimmetrikus, ha $R \cap \overset{-1}{R} \subseteq \mathrm{id}_X$.
5. Pontosan akkor teljesül, hogy $R^{-1} \circ R = \emptyset$, ha $R = \emptyset$.

II. Az alábbi relációk közül melyik reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus, szimmetrikus, rendezés, illetve ekvivalenciareláció? Az ekvivalenciarelációknál adjuk meg az ekvivalenciaosztályokat és a faktorhalmazokat.

1. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} |\, xy = 1\}$
3. $\left\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \middle|\, \exists c \in \mathbb{R}((x_1 - x_2 = 2c) \wedge (y_1 - y_2 = 3c))\right\}$

III. Mutassuk meg, hogy a relációk kompozíciója asszociatív művelet. Vagyis minden $R_1 \subseteq X \times Y$, $R_2 \subseteq Y \times Z$ és $R_3 \subseteq Z \times V$ relációra

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

teljesül.

IV. Mutassuk meg, hogy egy háromelemű halmazon

1. a relációk száma 512;
2. a reflexív relációk száma 64;
3. a szimmetrikus relációk száma 64;
4. az antiszimmetrikus relációk száma 216;
5. a tranzitív relációk száma 171;
6. a reflexív és szimmetrikus relációk száma 8;
7. a reflexív és antiszimmetrikus relációk száma 27;
8. a reflexív és tranzitív relációk száma 29;
9. a szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 8;
10. a szimmetrikus és tranzitív relációk száma 15;
11. az antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 152;
12. a reflexív, szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 1;
13. a reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációk száma 5;
14. a reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 19;
15. a szimmetrikus, antiszimmetriukus és tranzitív relációk száma 8;
16. a reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 1.

Függvények

I. Legyen $f : A \twoheadrightarrow B$ függvény (azaz $\operatorname{Dom} f = A$ nem feltétlenül teljesül). Igazoljuk az alábbiakat.

1. $f(\emptyset) = \emptyset$
2. Ha $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$, akkor $f(X_1) \subseteq f(X_2)$.
3. Ha valamely I indexhalmazra minden $i \in I$ esetén $X_i \subseteq A$, akkor

$$f\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(X_i)$$

$$f\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i)$$

   teljesül.

II. Legyen $f : A \twoheadrightarrow B$ függvény (azaz $\operatorname{Dom} f = A$ nem feltétlenül teljesül). Igazoljuk az alábbiakat.

1. $\overset{-1}{f}(\emptyset) = \emptyset$
2. Ha $X_1, X_2 \subseteq B$, akkor $\overset{-1}{f}(X_2 \setminus X_1) = \overset{-1}{f}(X_2) \setminus \overset{-1}{f}(X_1)$.
3. Ha $X_1 \subseteq X_2 \subseteq B$, akkor $\overset{-1}{f}(X_1) \subseteq \overset{-1}{f}(X_2)$.
4. Ha valamely I indexhalmazra minden $i \in I$ esetén $X_i \subseteq B$, akkor

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}(X_i)$$

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) = \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{f}(X_i)$$

   teljesül.

III. Legyen A és B tetszőleges halmaz, és legyen $H \subseteq \mathcal{F}(A, B)$ olyan részhalmaza az A halmazból B halmazba képező függvények halmazának, melyre teljesül, hogy minden $h_1, h_2 \in H$ esetén $h_1 \subseteq h_2$ vagy $h_2 \subseteq h_1$.

1. Mutassuk meg, hogy $f = \bigcup H$ függvény.
2. Mutassuk meg, hogy ha minden $h \in H$ függvény injektív, akkor az $f = \bigcup H$ függvény is injektív.

Vegyes, haladóbb feladatok

I. Mutassuk meg, hogy a kiválasztási axióma ekvivalens azzal, hogy minden függvénynek létezik jobbinverze. Azaz minden f függvényhez létezik olyan $g : \operatorname{Ran} f \to \operatorname{Dom} f$ függvény, hogy $f \circ g = \mathrm{id}_{\operatorname{Ran} f}$.

II. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mutassuk meg, hogy egy n elemű halmazon

1. a relációk száma $2^{\left(n^2\right)}$;
2. a reflexív relációk száma $2^{n(n-1)}$;
3. a szimmetrikus relációk száma $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$;
4. az antiszimmetrikus relációk száma $2^n 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
5. probléma: a tranzitív relációk száma[1];
6. a reflexív és szimmetrikus relációk száma $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
7. a reflexív és antiszimmetrikus relációk száma $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
8. probléma: a reflexív és tranzitív relációk száma[1];
9. a szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 2^n;
10. a szimmetrikus és tranzitív relációk száma
$$\theta(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T(k),$$
ahol $T(k)$ a 13. alfeladatban van definiálva;
11. probléma: az antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma[1];
12. a reflexív, szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 1;
13. a reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációk száma T_n, ahol az T_n sorozatot a $T_0 = 1$, $T_1 = 1$ kezdeti értékekkel és $n \geq 2$ esetén a
$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} T_k$$
rekurzióval definiálhatjuk;
14. probléma: a reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma[1];
15. a szimmetrikus, antiszimmetriukus és tranzitív relációk száma 2^n;
16. a reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 1.

III. Legyen $(A_i)_I$ olyan halmazrendszer, melynek minden A_i halmaza egyelemű. Vagyis
$$\forall i \in I\,((\exists x(x \in A_i)) \wedge (\forall x, y\,((x \in A_i \wedge y \in A_i) \to x = y)))\,.$$
A kiválasztási axiómára való hivatkozás nélkül mutassuk meg, hogy $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

[1] A szerző ismerete szerint megoldatlan probléma.