Kalkulus 1, 1. hét

Halmazok

I. Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat.

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
2. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
3. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$
4. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

II. Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat.

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
3. $(A \times B) \cup (C \times D) = \big(A \times (B \setminus D)\big) \cup \big((A \setminus C) \times (B \cap D)\big) \cup (C \times D)$

III. Legyen A, B és C halmaz. Az alább definiálandó X és Y halmazra teljesül-e az $X \subseteq Y$ vagy az $Y \subseteq X$ tartalmazás?

1. $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
2. $X = A \setminus C$, $Y = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$
3. $X = A \setminus (B \setminus C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$

IV. Bizonyítsuk a halmazrendszerekre vonatkozó alábbi összefüggéseket.

1. $\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{j \in J} B_j\Big) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (A_i \bigcap B_j)$
2. $\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcap_{j \in J} B_j\Big) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} (A_i \bigcup B_j)$
3. $A \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I} (A \setminus A_i)$

Teljes indukció

I. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőségeket.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$
6. Legyen $a_1, d \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $a_n = a_1 + (n-1)d$ képlettel megadott számtani sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n}{2}\big(2a_1+(n-1)d\big)$$

teljesül.
7. Legyen $a_1, q \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $a_n = a_1 q^{n-1}$ képlettel megadott mértani sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} \dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}, & \text{ha} \quad q \neq 1; \\ na_1, & \text{ha} \quad q = 1. \end{cases}$$

II. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket.
1. Ha $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ akkor
$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}.$$
2. Minden $0 < n \in \mathbb{N}$ esetén $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$.

Vegyes, haladóbb feladatok

I. Legyen X halmaz és $p : X \times X \to \{0,1\}$ szimmetrikus függvény. (Vagyis minden $a, b \in X$ esetén $p(a,b) = p(b,a)$.) Minden $A \subseteq X$ részhalmaz esetén legyen $A' = \{x \in X \mid \forall a \in A: \ p(x,a) = 1\}$.
1. Mutassuk meg, hogy minden $A, B \subseteq X$ esetén, ha $A \subseteq B$, akkor $B' \subseteq A'$.
2. Mutassuk meg, hogy minden $A \subseteq X$ esetén $A \subseteq A''$.
3. Mutassuk meg, hogy minden $A \subseteq X$ esetén $A' = A'''$.

II. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen A_n halmaz.
1. Mutassuk meg, hogy a $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ halmaznak pontosan azok az elemei, amelyek legfeljebb véges számú kivétellel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az A_n halmazhoz tartoznak.
2. Mutassuk meg, hogy a $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ halmaznak pontosan azok az elemei, amelyek végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ esetén az A_n halmazhoz tartoznak.

III. Bizonyítsuk be az alábbiakat.
1. Ha A halmaz, és $\{x,y\} \in A$, akkor $x, y \in \cup A$.
2. Ha A halmaz, és $(x,y) \in A$, akkor $x, y \in \cup\cup A$.
3. Ha f függvény, akkor $\operatorname{Ran} f, \operatorname{Dom} f \in \mathcal{P}(\cup\cup f)$.
4. Ha $f : A \to B$ függvény, akkor $f \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)))$.