

2. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

KALKULUS 1
BSc Matematika

2017. november 21.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

Név:

Neptun kód:

--	--	--	--	--	--

Kurzuskód:

--

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Σ

1. (5+5 pont) Határozza meg az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n} \left(\frac{3n+1}{3n-2} \right)^{6n+5},$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}.$$

2. (5+5 pont) Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Amennyiben igen, határozza meg az összegüket!

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7 \cdot 2^{n+1} \cos(n\pi) + 8 \cdot 3^{n-1}}{5^n},$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

3. (8 pont) Határozza meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n$$

valós hatványsor konvergenciatartományát!

4. (5+5 pont) Határozza meg az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}),$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3} + 1 - x}{\sin(\pi x)}.$$

5. (7 pont) Hogyan válasszuk meg az a, b valós paramétereket, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 x - a, & \text{ha } x < 0, \\ \sin^2 \frac{x}{\pi(x+b)}, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

függvény mindenütt folytonos legyen?

6. (5+5 pont)

Tegyük fel, hogy f pozitív folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumon ($f \in C[a, b]$). Bizonyítsuk be, hogy létezik $c \in [a, b]$, melyre

(a) $f(c) = \frac{f(a) + f(b)}{2},$

(b) $f(c) = \sqrt{f(a)f(b)}.$