

Kalkulus 1.
1. zárthelyi dolgozat
2017. 10. 10. 14.15-15.45

Név:
Neptun kód:
Oktató:

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | Σ: |
| | | | | | | |

1. Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. (5,5 p.)
a.) Mutassa meg, hogy $(A \setminus B) \setminus (B \setminus C) = A \setminus B$.
b.) Mutassa meg, hogy $A \subseteq B$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

2. Legyen $X = \mathbb{R}^2$ és definiáljuk a \approx relációt az X halmazon az alábbi módon. (4,3,3 p.)

$$(x_1, y_1) \approx (x_2, y_2) \text{ pontosan akkor, ha } x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

- a.) Mutassa meg, hogy \approx ekvivalenciareláció.
b.) Adja meg az $(1, 3) \in X$ elem által meghatározott ekvivalenciaosztály elemeit.
c.) Adja meg az X/\approx faktorhalmaz elemeit.

3. Legyen $A =]-3, -2[\cup \left\{ \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\} \subseteq \mathbb{R}$. (6,4,2 p.)

- a.) Adja meg az A halmaz belső, torlódási és izolált pontjainak a halmazát.
b.) Határozza meg az $\text{Int } A$ és az \overline{A} halmaz elemeit.
c.) Kompakt-e az \overline{A} halmaz?

4. Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \subseteq \mathbb{R}_0^+$ korlátos halmaz esetén (8 p.)

$$\inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$$

teljesül.

5. A határérték definíciója alapján igazolja a (8 p.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n - 1}{2n^2 - n + 17} = 2$$

határértéket.

6. Igazolja, hogy ha $H \subseteq \mathbb{R}$ korlátos nemüres halmaz, akkor (10 p.)

$$\sup H - \inf H = \sup \{x - y \mid x, y \in H\}.$$