

Kalkulus 1, 14. hét

Határozott integrál

I. Keressünk hibát az alábbi parciális integráláson alapuló számításban.

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} dx = \log x \cdot \frac{1}{\log x} - \int \log x \cdot \frac{-1}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} dx$$
$$0 = 1$$

II. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

$$1. \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \quad 2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \quad 3. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{3}$$
$$4. \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 \quad 5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} dx = \frac{1}{2} \quad 6. \int_0^1 (1-2x)^{19} dx = 0$$
$$7. \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx = \frac{1}{6} \quad 8. \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = 1 + \ln \frac{2}{1+e} \quad 9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx = 1$$

III. Legyen $f \in C([0, \pi], \mathbb{R})$ és mutassuk meg, hogy ekkor $\int_0^{\pi} f(\sin x) \cos x dx = 0$.

IV. Legyen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{4x} \sqrt{1+t^8} dt$ és $g(x) = \int_{\sin x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$. Határozzuk meg az f és g függvény deriváltját!

V. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) dt}{x^2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{tg t} dt}{\int_0^{\lg x} \sqrt{\sin t} dt} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3}$$
$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \arctg 3t dt}{x^2} \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt}{\frac{1}{x}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (\arctg t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$$

VI. Számoljuk ki a következő improprius integrálokat, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ paraméter.

$$1. \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx \quad 2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \quad 3. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx$$
$$4. \int_1^{\infty} \frac{1}{2^x-1} dx \quad 5. \int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2} dx \quad 6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$$7. \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx \quad 8. \int_0^1 \log x dx \quad 9. \int_0^\infty x e^{-ax} dx$$

VII. Konvergensek-e az alábbi integrálok?

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^1 \frac{1}{\sin 2x} dx & 2. \int_0^1 \frac{1}{\sin 2\sqrt{x}} dx & 3. \int_0^\infty e^{-x} \cos x dx \\ 4. \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx & 5. \int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{1-x})^3} dx & 6. \int_0^\infty \frac{x^2 \cos^2(x^5+3)}{x^4+3x^2+5} dx \\ 7. \int_3^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sin^2 x} dx & 8. \int_3^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x}-\sin^2 x} dx & 9. \int_3^\infty \frac{1}{2x^2+\sin x} dx \\ 10. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sqrt{x+x^3}} dx & 11. \int_0^\infty \frac{\sin^2\left(+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2x}(1+\sqrt{x})^3} dx & 12. \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx \end{array}$$

Haladóbb feladatok

I. Számoljuk ki az alábbi integrálok értékét.

$$\int_0^\pi \log \sin x dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx$$

II. Igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{ak}{n}\right)} = \frac{(1+a)^{1+\frac{1}{a}}}{e}.$$

III. Legyen $f \in \mathcal{R}([0, 1], \mathbb{R})$ olyan függvény, melyhez létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in [0, 1]$ esetén $f(x) \geq c$ teljesül. Keressük meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

határértéket.

IV. Számoljuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ és a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ határértéket.

V. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

1. Igazoljuk, hogy $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, valamint minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ esetén $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $I_n \geq I_{n+1}$.
3. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$I_{2n}^2 \geq I_{2n} I_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)} \geq I_{2n+2}^2.$$

4. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n-1}} \geq I_{2n} \sqrt{2n} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n+1}}.$$

5. Igazoljuk a *Wallis-formulát*.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \sqrt{\pi}$$

VI. Tekintsük az alábbi sorozatot.

$$a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$$

1. Mutassuk meg, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

2. Igazoljuk, hogy az a sorozat monoton fogyó.
3. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\log n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right)$$

teljesül.

4. Mutassuk meg, hogy az a sorozat alulról korlátos.

(A

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$

számot *Euler-Mascheroni-állandónak* nevezzük, $\gamma \approx 0.5772156649$.)