

Kalkulus 1, 12. hét

Középérték tételek

I. Elemi egyenlőtlenségek származtatása a középérték tételekből.

1. Igazoljuk, hogy minden $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ számra $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy tetszőleges $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ számra $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$ teljesül.

L'Hospital-szabály

I. Számoljuk ki a következő határértékeket!

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{e^{2x}}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right)$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x \sin 2x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{x}}$
5. $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{\sin x})^{\operatorname{ctg} \pi x}$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^x$
8. $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$
9. $\lim_{x \rightarrow +0} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}}$

Függvények konvexitása

I. Példák a Jensen-egyenlőtlenségre.

1. Igazoljuk, hogy minden $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ számra, az $X = \sum_{i=1}^n x_i$ és $A = \sum_{i=1}^n a_i$ jelölések mellett

$$X \log \frac{X}{A} \leq \sum_{i=1}^n x_i \log \frac{x_i}{a_i}$$

teljesül. (Segítség: Tekintsük az $\operatorname{id}_{\mathbb{R}} \cdot \log$ függvényt.)

2. Igazoljuk, hogy minden $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ és $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^+$ számra, az $A = \sum_{i=1}^n a_i$ jelölés mellett

$$\sqrt[A]{\prod_{i=1}^n x_i^{a_i}} + \sqrt[A]{\prod_{i=1}^n y_i^{a_i}} \leq \sqrt[A]{\prod_{i=1}^n (x_i + y_i)^{a_i}}$$

teljesül. (Segítség: Tekintsük a $\log(1 + \exp)$ függvényt.)

II. Függvények konvexitása.

1. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény. Mutassuk meg, hogy ha létezik olyan $c \in]a, b[$ szám melyre $f(a) = f(c) = f(b)$, akkor az f függvény állandó.
2. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan konvex függvény, melyre g monoton növekvő és $\text{Dom}(g \circ f)$ intervallum. Mutassuk meg, hogy ekkor a $g \circ f$ függvény is konvex.
3. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény, továbbá legyen $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x^{-1})$. Bizonyítsuk be, hogy az $\text{id}_{\mathbb{R}^+} \circ f$ függvény pontosan akkor konvex, ha a g függvény konvex.
4. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ kétszer differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy a $\log \circ f$ függvény pontosan akkor konvex, ha $f \cdot f'' \geq (f')^2$.

Függvények szélsőértéke

I. Van-e minimuma illetve maximuma az $f(x) = x^2 e^{-3x}$ függvénynek a $[0, 1]$ intervallumon, ha igen, határozzuk meg a szélsőértékeket.

II. Szélsőérték feladatok.

1. Legyen $T \in \mathbb{R}^+$ egy körcikk területe. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk kerülete minimális?
2. Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ egy körcikk kerülete. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk területe a legnagyobb?
3. Határozzuk meg az $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú henger adatait!
4. Határozzuk meg az $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú kúp adatait!
5. Határozzuk meg a $V \in \mathbb{R}^+$ térfogatú, felül nyitott, legkisebb felszínű henger adatait!
6. Adott $V \in \mathbb{R}^+$ térfogatú, négyzet alapú tartályt akarunk készíteni a legkevesebb anyagból. Mekkoraak legyenek az élek, ha a tartály felül nyitott?

Függvényvizsgálat

Teljes függvényvizsgálatnál válaszoljunk az alábbi kérdésekre: hol értelmezett a függvény, mi a határértéke a plusz- és mínusz végtelenben, illetve a $\text{Dom } f$ halmaz határpontjaiban, mi a lineáris aszimptotája a plusz- és mínusz végtelenben, hol monoton növekvő illetve csökkenő a függvény, hol van lokális szélsőértéke, és a milyen jellegű szélsőérték (maximum, minimum), hol konvex illetve konkáv a függvény, hol van inflexiós pontja, hol van globális minimuma illetve maximuma a függvénynek, mi a függvény értékkészlete.

I. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 e^{-x}$ és a $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 2 \arctg \frac{x}{1+x}$ függvényen.

Binomiális és Taylor-sorfejtés

I. A binomiális sorfejtés segítségével írjuk fel az \arctg , \arcsin , $\sqrt{1 + \text{id}_{\mathbb{R}}}$, $\sqrt[3]{1 + \text{id}_{\mathbb{R}}^2}$ függvény 0 körüli 9-ed rendű Taylor-polinomját.

II. Határozzuk meg $k = 100$ illetve $k = 101$ esetén az alábbi értékeket.

$$\arcsin^{(k)}(0) \quad \operatorname{arctg}^{(k)}(0) \quad \operatorname{arch}^{(k)}(0) \quad (\log(1 + \operatorname{id}_{[-1, \infty[)})^{(k)}(0) \quad \left(\sqrt{1 + \operatorname{id}_{\mathbb{R}}^4}\right)^{(k)}(0)$$

Haladóbb feladatok

I. A Taylor-sorfejtés segítségével igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek (ahol $x \in \mathbb{R}$).

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{e} - 1)^e \quad 2. \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{k}\right) \quad 3. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k}\right)$$

II. Tekintsük az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy az f függvény differenciálható, a 0 pontban lokális minimuma van, azonban f' nem vált előjelet a 0 pontban (vagyis a 0 bármely környezetében f' felvesz pozitív és negatív értékeket is).

III. Tekintsük az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy az f függvény differenciálható, $f'(0) = 1$, azonban f nem monoton a 0 pont egyetlen környezetében sem (vagyis a 0 bármely környezetében f' felvesz pozitív és negatív értékeket is).