Kalkulus 1, 11. hét

Differenciálszámítás I.

I. Deriváljuk a következő függvényeket és hozzuk egyszerűbb alakra a deriváltakat!

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{5}$
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}\sqrt[3]{x}}$
3. $f(x) = \sqrt[4]{3x - 2x^2}$
4. $f(x) = \mathrm{e}^x(1 + x^2)$
5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x + \cos x}$
6. $f(x) = \sin^3 x$
7. $f(x) = \sin^4 3x^2$
8. $f(x) = \sin \log x$
9. $f(x) = \log \sqrt{\cos x}$
10. $f(x) = \log \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$
11. $f(x) = \log \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x}$
12. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \operatorname{arctg} x$
13. $f(x) = x^{\operatorname{tg} x}$
14. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$
15. $f(x) = (ax + b)^{cx+d}$
16. $f(x) = \log \sin \cos x^2$
17. $f(x) = \dfrac{x^2}{2}\left(\log x - \dfrac{1}{2}\right)$
18. $f(x) = \dfrac{\sin(x)\log(1 + \cos^2 x^3)}{x}$

II. Keressük meg az $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$ és a $g = \sqrt[5]{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 \cdot \operatorname{arctg}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^3)}$ függvény deriváltját.

III. Tegyük folytonossá az alábbi függvényt a 0 pontban, és számoljuk ki a deriváltját.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

IV. Mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvény minden pontban differenciálható, azonban az f' függvény nem folytonos.

V. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és legyen $f : I \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, melynek a deriváltja korlátos. Igazoljuk, hogy ekkor f egyenletesen folytonos az egész I intervallumon.

VI. Adjuk meg az alábbi $f(x)$ függvények x_0 pontbeli érintőjének az egyenletét.

1. $f(x) = x^2 \quad x_0 = 4$
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \quad x_0 = 2$
3. $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2} \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$
4. $f(x) = \sin x^2 \quad x_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$