

Kalkulus 1, 8. hét

Leibniz-, abszolút és feltételesen konvergens sorok

I. A Leibniz-kritérium segítségével vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek illetve feltételesen konvergensek-e.

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} & 2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1} & 3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\sqrt{n}} \\ 4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) & 5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \right) & 6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n} \end{array}$$

II. Becsüljük meg, hogy hányadik részletösszeg esetén lesz a sor összegére kapott becslés hibája 10^{-4} -nél kisebb!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2}{5^{2n} + 3n^2 + 1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^{nn} + 3}$$

III. Konvergensek, abszolút konvergensek illetve feltételesen konvergensek-e az alábbi sorok?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n + n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4-n}{4+n} \right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2+n3^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt[3]{n^2+1}}$$

Hatványsorok

I. Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát és adjuk meg, hogy mely $x \in \mathbb{R}$ esetén lesznek konvergensek a sorok!

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=0}^{\infty} nx^n & 2. \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n & 3. \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} x^n \\ 4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n} x^{2n} & 5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & 6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n)!} (x+7)^n \\ 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n & 8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{9^n} (x-2)^{2n} & 9. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n \end{array}$$

Sorok szorzata

I. Tekintsük az $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = n$ és $b_n = 1$ sorozatokat. Igazoljuk, hogy Cauchy-szorzatukra minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(a * b)_n = \frac{n(n+1)}{2}$ teljesül.

II. Legyen $q \in]-1, 1[$ és $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = q^n$. Mutassuk meg, hogy $(a * a)_n = (n + 1)q^n$ teljesül, és ennek segítségével igazoljuk a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)q^n = \frac{1}{(1 - q)^2}$$

formulát.

III. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású zérussorozat (azaz $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| < \infty$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$).

Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_n (-1)^n a_n$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|.$$

IV. Igazoljuk, hogy a $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sor konvergens, de önmagával vett Cauchy-szorzata már divergens.

V. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ korlátos változású zérussorozat, és legyen $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olyan, hogy $|q| = 1$. Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_n a_n q^n$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \frac{2}{|1 - q|}.$$

Haladóbb feladatok

I. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n - \log n}$ sor? ($\log = \ln$)

II. Adjuk meg, hogy mely $x \in \mathbb{R}$ értékek esetén lesznek a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}} x^n$$

sorok konvergenssek!

III. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ korlátos változású zérussorozat, és legyen $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\cos x \neq 1$. Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_n a_n \sin(nx)$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos x}} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right).$$