

Kalkulus 1, 7. hét

Elemi sorösszegek és geometriai sorok

I. Igazoljuk a sorokra vonatkozó alábbi összefüggéseket!

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} = 1 & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+2n} = 3 & 3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^3-n} = 1 \\ 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = 1 & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}} = 1 \\ 7. \sum_{n=1}^{\infty} \arctg n - \arctg(n+1) = -\frac{\pi}{4} & 8. \sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\log 2 & 9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{1}{4} \end{array}$$

II. Konvergensek-e az alábbi sorok és ha igen, mi a határértékük?

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}} & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}} & 3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{2n}i} \\ 4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{4^n(1-i)^{2n}} & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 4^n + 5(-1)^n}{3^{2n}} \end{array}$$

Majoráns, minoráns, gyök- és hányadoskritérium

I. A majoráns, illetve minoráns kritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek, illetve melyek divergensek.

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2} & 2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 8n^2 + 1} & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - n + 3}{2n^4 + 2n^2 + 7} \\ 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 3}{2n^5 + 2n^2 + 7} & 5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+3} - \sqrt{n^4-1}\right) \\ 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n} & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} & 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \end{array}$$

II. A gyökkritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n} & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5 4^{n+1}} & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n} \\ 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2} & 5. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}} & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{9^n} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2} & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2} \frac{1}{3^{2n+1}} & 9. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+1}\right)^{n^3} \\
10. \sum_{n=4}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} & 11. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2} & 12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\log^n n}
\end{array}$$

III. A hányadoskritérium segítségével döntjük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

$$\begin{array}{lll}
1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!} & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} \\
4. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{(n-1)!} & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+n)^n}{(n+1)!} & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{5^{3n} n! (n+1)! (n+2)!}
\end{array}$$

Haladóbb feladatok

I. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{(n+1)^3 - 1}{(n+1)^3 + 1} \right) = \ln \frac{2}{3}$.

II. Igazoljuk az alábbi végtelen szorzatokra vonatkozó egyenlőségeket.

$$\begin{array}{lll}
1. \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \infty & 2. \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 0 & 3. \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right) = 1 \\
4. \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2 - 1}\right) = 2 & 5. \prod_{k=3}^{\infty} \left(1 - \frac{4}{k^2}\right) = \frac{1}{6} & 6. \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{k^2 + k}\right) = \frac{1}{3}
\end{array}$$

Speciális sorok konvergenciája

I. Legyen $a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat. Mutassuk meg, hogy ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \lim a$.

II. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan monoton csökkenő zérussorozat, melyre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

III. Legyen $a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ olyan sorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k = 0$.

IV. Mutassuk meg, hogy ha az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ teljesül, akkor a $\sum_n \frac{a_n}{n}$ sor divergens.

V. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású sorozat, azaz $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor az a sorozat konvergens.

VI. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Mutassuk meg, hogy ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

VII. Legyen $x \in \mathbb{C}$ $|x| < 1$, és tekintsük az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $a_k = x^k$ sorozatot. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

1. $\sum_{k=0}^n kx^k = \frac{x^{n+1}}{x-1}n - \frac{x(x^n-1)}{(x-1)^2}$, valamint $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$;
2. $\sum_{k=0}^n k^2x^k = \frac{x^{n+1}}{x-1}n^2 - \frac{2x^{n+1}}{(x-1)^2}n + \frac{x(1+x)(x^n-1)}{(x-1)^3}$, valamint $\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$;
3. $\sum_{k=0}^n k^3x^k = \frac{x^{n+1}}{x-1}n^3 - \frac{3x^{n+1}}{(x-1)^2}n^2 + \frac{3x^{n+1}(x+1)}{(x+1)^3}n - \frac{x(x^2+4x+1)(x^n-1)}{(x-1)^4}$, valamint $\sum_{n=0}^{\infty} n^3x^n = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$

teljesül.