

Kalkulus 1, 3. hét

Infimum és szuprémum

I. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz. Mutassuk meg, hogy létezik $\inf A$, és $\inf A = -(\sup(-A))$ teljesül.

II. Legyen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy $A \cup B$ is felülről korlátos, valamint $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ teljesül.

III. Legyen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy $A + B$ is felülről korlátos, valamint $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$ teljesül.

IV. Legyen $A, B \subseteq \mathbb{R}_0^+$ felülről korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy AB is felülről korlátos, valamint $(\sup A)(\sup B) = \sup(AB)$ teljesül.

Binomiális tétel

I. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén teljesülnek az alábbiak.

$$\begin{array}{ll} 1. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n & 2. \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1} \\ 3. \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 & 4. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \end{array}$$

Egyenlőtlenségek

I. Igazoljuk, hogy $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ számokra teljesülnek az alábbiak.

- $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$
- $6 \leq \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$
- $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$
- Ha $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, akkor $a + 2b + 3c + 4d \leq \sqrt{30}$.

Haladóbb egyenlőtlenségek

I. Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ olyan, melyre $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor

$$2^n \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n).$$

II. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$a + b + c \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

III. Mutassuk meg, hogy mindenn $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$n^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

IV. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$a + b + c + d \leq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a}.$$

V. Mutassuk meg, hogy ha az $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számokra $abc = 1$ teljesül, akkor

$$a + b + c \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

VI. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ esetén ha $a + b + c + d = 4$, akkor

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \leq \frac{4}{abcd}.$$

VII. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számra

$$\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} \leq \frac{a + b + c}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}.$$

VIII. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számra

$$4 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3\sqrt[3]{abc}}{a + b + c}.$$

IX. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számra

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Haladóbb példák számosságra

I. Legyen E végtelen halmaz. Igazoljuk, hogy E véges részhalmazainak a halmaza azonos számosságú az E halmazzal, azaz

$$|\{A \subseteq E \mid |A| < |\mathbb{N}|\}| = |E|$$

teljesül. (Használjuk fel, hogy $|E| = |E \times E|$.)

II. Legyen E végtelen halmaz. Igazoljuk, hogy az E halmaz E -vel ekvipotens (azonos számosságú) részhalmazainak a halmaza ekvipotens E hatványhalmazával, azaz

$$|\{A \subseteq E \mid |A| = |E|\}| = |\mathcal{P}(E)|$$

teljesül. (Használjuk fel, hogy $|E| = |E \times E|$.)

III. Igazoljuk, hogy az E halmaz pontosan akkor végtelen, ha minden $f : E \rightarrow E$ függvényhez létezik nem triviális ($A \neq \emptyset, A \neq E$) $A \subseteq E$ invariáns ($f(A) \subseteq A$) halmaz!