Kalkulus 2 Tematika

2016/17/II.

1. Hét:

Norma fogalma, $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_\infty$ mint norma az $\mathbb{R}^n$ téren. $B_r(x)$ bevezetése. Nyílt, zárt, korlátos halmaz, valamint ezen halmazok alaptulajdonságai. Halmaz belső, torlódási, határ és izolált pontjai. Halmaz belseje és lezártja (Int A és $\overline{A}$). Int A és $\overline{A}$ alaptulajdonságai. Sűrű halmaz. Egy halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat határértéke. Határérték egyértelműsége. Minden konvergens sorozat korlátos. Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke. Torlódási pont jellemzése sorozattal. Halmaz zártságának jellemzése sorozattal. Cauchy-sorozat. Minden Cauchy-sorozat korlátos. Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat. Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata. Teljes halmaz. Kompakt halmaz és alaptulajdonságai. Minden kompakt halmaz korlátos és zárt. Kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt. Cantor-féle közösrész-tétel. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény határértéke és a határérték egyértelműsége. Átviteli elv határértékre. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény adott pontbeli folytonossága és folytonossága. Átviteli elv folytonosságra. Függvények összege, számszorosa és kompozíciója folytonos. A folytonosság topologikus jellemzése. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény értékkészlete kompakt. Weierstrass-féle maximum- minimum elv. Kompakt halmazon értelmezett folytonos injekció inverze folytonos. Példa olyan folytonos injektív függvényre, mely inverze nem folytonos. Egyenletesen folytonos függvények. Heine-tétel. Kontrakció. Banach-féle fixponttétel.

2. Hét:

Az $\mathbb{R}^n$ térben minden korlátos tégla kompakt. Az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt. Bolzano–Weierstrass-tétel (a kompaktság jellemzése sorozatokkal). Az $\mathbb{R}^n$ teljessége. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok. Az $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmaza pontosan akkor összefüggő, ha ívszerűen összefüggő. Összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő) halmaz folytonos függvény általi képe összefüggő (illetve ívszerűen összefüggő). Sorok az $\mathbb{R}^n$ térben. Minden abszolút konvergens sor konvergens. Skaláris szorzás. Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. Ortogonális, normált és teljes vektorrendszer skalárszorzatos téren. Vektor felbontása ortonormált bázisban. Bessel-egyenlőtlenség és Parseval-egyenlőség

3. Hét:

Az $\mathbb{R}^n$ tér teljessége. Operátornorma az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések terén. Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések folytonossága. Az $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tér teljessége. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény adott ponbeli deriváltjának egyértelműsége. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény deriváltja. Ahol egy függvény differenciálható, ott folytonos is. Függvények összegének, számszorosának és szorzatának deriváltja. Az összetett függvény deriválási szabálya. Iránymenti derivált. Parciális derivált. Gradiens.

4. Hét:

Folytonosan differenciálható függvények. Iránymenti derivált kiszámítása a derivált segítségével. Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény minden komponense deriválható, akkor f is deriválható. Függvény derivált (Jacobi-) mátrixa. Jacobi determináns. Divergencia és rotáció. Véges növekmények formulája. Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvényre és az $a \in \mathbb{R}^n$ pontra $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Int}\operatorname{Dom}\partial_i f$ teljesül és minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\partial_i f$ folytonos az a pontban, akkor f differenciálható az a pontban. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható az $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon, ha minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\Omega \subseteq \operatorname{Dom}\partial_i f$ és a $\partial_i f$ függvény folytonos az Ω halmazon. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény magasabbrendű deriváltjai. Young-tétel kétszer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény másodrendű deriváltjaira. Hesse-mátrix. Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény Taylor-sora.

5. Hét:

A $V^k \to \mathbb{R}$ k-lineáris leképezés fogalma. Szimmetrikus, antiszimmetrikus, pozitív, pozitív definit, negatív, negatív definit és indefinit k-lineáris leképezés. Infinitezimális Taylor-formula. Lokális maximum, minimum, szigorú maximum, szigorú minimum, lokális szélsőérték, szigorú lokális szélsőérték és globális szélsőérték. A lokális szélsőérték jellemzése nem elfajult második deriválttal rendelkező skalárfüggvény esetén. A feltételes szélsőérték fogalma. A feltételes szélsőérték létezésének szükséges feltétele. Lagrange-multiplikátor fogalma.

6. Hét:

Implicitfüggvény-tétel. Inverzfüggvény-tétel.

7. Hét:

Térgörbe, térgörbe paraméterezése és ívhossza. Skalár- és vektorértékű függvény vonalmenti integrálja. Felület, felület paraméterezése, normálvektora és felszíne. Skalár- és vektorértékű függvény felületi integrálja. Tértartomány, tértartomány paraméterezése és térfogata. Skalárértékű függvény integrálja tértartományon. Skalár- és vektorpotenciálos vektormezők. Csillagszerű és egyszeresen összefüggő halmazok. Elégséges feltétel skalárpotenciál és vektorpotenciál létezéséhez.

8. Hét:

Gauss–Osztrogradszkij-tétel és Stokes-tétel kimondása.

9. Hét:

Függvénysorozat és függvénysor. Függvénysorozat határfüggvénye, pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Függvénysor határfüggvénye, pontonkénti, egyenletes és normális konvergenciája. A szuprémum norma a korlátos függvények terén. A korlátos halmazon értelmezett folytonos függvények tere a szuprémum normával Banach-tér. Folytonos függvények egyenletesen csak folytonos függvényhez konvergálhatnak. Weierstrass-tétel függvénysorok egyenletes konvergenciájáról.

10. Hét:
Hatványsorok. Konvergenciasugár, Cauchy–Hadamrad-tétel és Abel-tétel hatványsorokról. Függvénysorozat és függvénysor tagonkénti differenciálhatóságának kritériuma. Korlátos halmazon értelmezett folytonos függvényekből álló függvénysorozat és függvénysor tagonkénti integrálásának kritériuma.

11. Hét:
Az $f(A)$ szimbólum értelmezése, ahol $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan végtelenszer differenciálható függvény esetén, melynek Taylor-sora megegyezik a függvénnyel. Mátrix függvényének kiszámítási módszere a Jordan-felbontás segítségével.

12. Hét:
Trigonometrikus polinomok tere. Trigonometrikus polinomok összege, számszorosa, szorzata és eltoltja trigonometrikus polinom. A $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ vektorrendszer teljes ortonormált rendszert alkot a $C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ térben és a $\left\{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+\right\}$ vektorrendszer teljes ortonormált rendszert alkot a $C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ térben. A $[-\pi, \pi]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények Fourier-együtthatói és Fourier-sora. Becslés k-szor folytonosan differenciálható függvények Fourier-együtthatóira. Kétszer folytonosan differenciálható 2π szerint periodikus függvények Fourier-sora egyenletesen konvergál a függvényhez.

13. Hét:
Ha egy Fourier-sor egyenletesen konvergens, akkor a Fourier-sorban szereplő együtthatók megegyeznek a határfüggvény Fourier-együtthatóival. Riemann–Lebesgue-lemma. Dirichlet-féle magfüggvény és elemi tulajdonságai. A Fourier-sor részletösszege a Dirichlet-féle magfüggvénnyel vett konvolúció.

14. Hét:
Dirichlet-féle lokalizációs tétel. Differenciálható 2π szerint periodikus függvény Fourier-sora megegyezik a határfüggvénnyel. Nevezetes sorösszegek a Dirichlet-féle lokalizációs tétel alapján (pl. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$). Egydimenziós hővezetés egyenlet megoldása Fourier-sorfejtéssel. Cesàro-összegezhető sorok. A Fourier-sorra vonatkozó Fejér-tétel kimondása.