Integrálszámítás

Integrálok

I. Legyen $\gamma : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ olyan függvény, mely folytonosan differenciálható az $[a, b]$ intervallumon.

Ekkor $\Gamma := \gamma([a, b])$ egy *görbe*, γ pedig egy *paraméterezése*.

A Γ *görbe ívhossza*: $l(\Gamma) := \displaystyle\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}\, t$.

Ha $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy $\Gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$, akkor az f *függvény* Γ *görbementi integrálja*:

$$\int\limits_{\Gamma} f := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}\, t.$$

Ha $v : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ olyan folytonos függvény, hogy $\Gamma \subseteq \operatorname{Dom} f$, akkor az f *függvény* Γ *görbementi integrálja*:

$$\int\limits_{\Gamma} v := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \,\mathrm{d}\, t.$$

II. Legyen $p : \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^3$ olyan függvény, mely injektív, az inverze folytonos, folytonosan differenciálható az $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ halmazon és minden $x \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ pontban $(\mathrm{D}\, p)(x)$ injektív lineáris leképezés.

Ekkor $F := p([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$ egy *felület*, p pedig egy *paraméterezése*.

Az F *felület normálisa*:

$$n : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3 \qquad (x_1, x_2) \mapsto (\partial_1 p)(x_1, x_2) \times (\partial_2 p)(x_1, x_2).$$

Az F *felület felszíne*: $A(F) := \displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \|n(u, v)\| \,\mathrm{d}\, v \,\mathrm{d}\, u$.

Ha $f : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy $F \subseteq \operatorname{Dom} f$, akkor az f *függvény* F *felületmenti integrálja*:

$$\int\limits_{F} f := \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(p(u, v)) \cdot \|n(u, v)\| \,\mathrm{d}\, v \,\mathrm{d}\, u.$$

Ha $v : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^3$ olyan folytonos függvény, hogy $F \subseteq \operatorname{Dom} f$, akkor az f *függvény* F *felületmenti integrálja*:

$$\int\limits_{F} v := \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \langle v(p(u, v)), n(u, v) \rangle \,\mathrm{d}\, v \,\mathrm{d}\, u.$$

III. Legyen $P : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^3$ olyan függvény, mely injektív, az inverze folytonos, folytonosan differenciálható az $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ halmazon és minden $x \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ pontban $\det((\mathrm{D}\, P)(x)) > 0$.

Ekkor $\Omega := P([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) \times [a_3, b_3])$ egy *tartomány*, P pedig egy *paraméterezése*.

A P paraméterezéshez tartozó *Jacobi-determináns*:

$$J_P : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R} \qquad (u, v, w) \mapsto \det((\mathrm{D}\, P)(u, v, w)).$$

Az Ω *tartomány térfogata*: $V(\Omega) := \displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} J_P(u, v, w) \,\mathrm{d}\, w \,\mathrm{d}\, v \,\mathrm{d}\, u.$

Ha $f : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy $\Omega \subseteq \mathrm{Dom}\, f$, akkor az *$f$ függvény Ω tartományon vett térfogati integrálja*:

$$\int_\Omega f := \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(P(u, v, w)) \cdot J_P(u, v, w) \,\mathrm{d}\, w \,\mathrm{d}\, v \,\mathrm{d}\, u.$$

Potenciál

A $v : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező *potenciálos*, ha létezik olyan $U : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény melyre $\mathrm{Dom}\, v \subseteq \mathrm{Dom}\, U$ és minden $x \in \mathrm{Dom}\, v$ esetén $v(x) = (\mathrm{grad}\, U)(x)$ teljesül. Ekkor U a v *skalárpotenciálja*.

Ha $v : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, $\mathrm{Dom}\, v$ csillagszerű halmaz és minden $x \in \mathrm{Dom}\, v$ pontban $(\mathrm{rot}\, v)(x) = 0$, akkor v potenciálos.

A $v : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező *vektorpotenciálos*, ha létezik olyan $A : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező melyre $\mathrm{Dom}\, v \subseteq \mathrm{Dom}\, A$ és minden $x \in \mathrm{Dom}\, v$ esetén $v(x) = (\mathrm{rot}\, A)(x)$ teljesül. Ekkor A a v *vektorpotenciálja*.

Ha $v : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, $\mathrm{Dom}\, v$ csillagszerű halmaz és minden $x \in \mathrm{Dom}\, v$ pontban $(\mathrm{div}\, v)(x) = 0$, akkor v vektorpotenciálos.

Integrál formulák

Legyen $\gamma : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^3$ olyan függvény, mely folytonosan differenciálható az $[a,b]$ intervallumon. Legyen $v : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^3$ olyan potenciálos vektormező, melyre $\gamma([a,b]) \subseteq \operatorname{Dom} v$ teljesül és legyen $U : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ a v vektormező potenciálja. Ekkor

$$\int_{\gamma([a,b])} v = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)).$$

Gauss–Osztrogradszkij-tétel. Legyen az $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ tartomány, valamint legyen $v : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^3$ olyan vektormező, mely kétszer folytonosan differenciálható az Ω halmazon. Ekkor

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v = \int_{\partial\Omega} v,$$

ahol $\partial\Omega$ felületet úgy kell irányítani, hogy a normálvektora kifele mutasson az Ω tartományból.

Stokes-tétel. Legyen az $F \subseteq \mathbb{R}^3$ felület, valamint legyen $v : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^3$ olyan vektormező, mely kétszer folytonosan differenciálható az F halmazon. Ekkor

$$\int_{F} \operatorname{rot} v = \int_{\partial F} v,$$

ahol ∂F görbét úgy kell irányítani, hogy az F felület normálvektorával jobbsodrású rendszert alkosson.