Kalkulus 2.
2. Pótzárthelyi dolgozat
2017. 5. 12. 12.15-13.45

Név:
Neptun kód:
Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Számolja ki az alábbi integrálokat. *(6+6 p.)*
   a.) $\iint_T \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y,\ x^2+y^2 \leq 2x\right\}$
   b.) $\int_0^1 \int_{y^2}^1 y\cos\left(x^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

2. Számolja ki a $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ vektormező felületi integrálját az origó körüli $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömbfelületen, kifelé mutató normálvektor esetén. *(8 p.)*

3. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és tekintsük az *(2+5+5 p.)*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \mapsto (5x + 2y + \sin x, x^2 + 3x + ay + 2)$$

függvényt.
   a. Írja le az f függvényre és a $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ pontra vonatkozó inverzfüggvény-tételt.
   b. Mely a paraméter esetén létezik a $(0,0)$ pontnak olyan V nyílt környezete, ahol az f függvény invertálható, és az inverze is differenciálható?
   c. Az $a = -1$ esetben határozza meg a $(\mathrm{D}\,f^{-1})(0,2)$ leképezés mátrixát.

4. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \dfrac{2n}{n^2+1} \cdot \dfrac{x}{1+nx^2}$. *(2+3+5 p.)*
   a.) Mutassa meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = \frac{2n}{n^2+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

   teljesül.
   b.) Mutassa meg, hogy a $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ függvénysor egyenletesen konvergens az $\mathbb{R}$ halmazon.
   c.) Igazolja, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx^2)}{n^2+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log(1+nx^2)}{n^2+1}\right)'.$$

5. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ és $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & 8 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. Számolja ki az $f(A)$ mátrixot. *(8 p.)*