Kalkulus 2.
1. Zárthelyi dolgozat
2017. 3. 14. 14.15-15.45

Név:
Neptun kód:
Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ síkon az alábbi halmazt. *(6 p.)*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \leq 0,\ x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 |\ -1 \leq x \leq 1\}$$

Határozza meg az A halmaz belsejét, torlódási pontjait és lezártját.

2. Mennyi a minimuma az $f(x,y,z,v) = x^2 + y^2 + z^2 + v^2$ függvénynek az $x + 2y + 3z - 6v = 20$ és az $x + y + z + v = 2$ feltételek mellett? *(8 p.)*

3. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(u) = (u^3 - u, 2^u, 1 + u)$ és $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = 3x^2y + 2^z$. Legyen $u_0 = 1$ és $(x_0, y_0, z_0) = (1, -2, 3)$. Határozza meg a $(\mathrm{D}(g \circ f))(u_0)$ és a $(\mathrm{D}(f \circ g))(x_0, y_0, z_0)$ mennyiségeket. *(8 p.)*

4. Tekintsük az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x^2+1}\right)$ függvényt. *(20 p.)*
   - a.) Számolja ki a $(\partial_x f)(x,y)$ és a $(\partial_y f)(x,y)$ mennyiséget.
   - b.) Igazolja, hogy f mindenütt folytonosan differenciálható.
   - c.) Számolja ki a $(\operatorname{grad} f)(1,2)$ vektort.
   - d.) Határozza meg az f függvény $a = (1,2)$ pontbeli $e = (2,1)$ iránymenti deriváltját.
   - e.) Írja fel az f függvény $a = (1,2)$ pontbeli érintősíkjának az egyenletét.

5. Legyen $a \in \mathbb{R}^3$ rögzített vektor és $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az identitás függvény, azaz $r(x,y,z) = (x,y,z)$. Igazolja, hogy $\operatorname{rot}(a \times r) = 2a$ és $\operatorname{div}(r\langle r, a\rangle) = 4\langle r, a\rangle$ teljesül (ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jelöli a megszokott skaláris szorzást az $\mathbb{R}^3$ téren). *(8 p.)*