Kalkulus 2, 14. hét

A Fourier-sorfejtés alkalmazásai

I. Legyen D és l pozitív valós paraméter és Φ_0 olyan differenciálható függvény a $[0, l]$ intervallumon, melyre $\Phi_0(0) = \Phi_0(l) = 0$ teljesül. Igazoljuk, hogy a

$$\Phi : [0, l] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad (x, t) \mapsto \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{Dk^2\pi^2}{l^2} t} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \cdot \int_0^l \Phi_0(\xi) \sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right) \mathrm{d}\,\xi$$

függvény megoldása a

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2}$$

(hővezetést leíró) differenciálegyenletnek a $[0, l] \times \mathbb{R}^+$ halmazon, és

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x), \quad \Phi(0, t) = \Phi(l, t) = 0$$

teljesül!

II. Legyen c és l pozitív valós paraméter és u_0 olyan differenciálható függvény a $[0, l]$ intervallumon, melyre $u_0(0) = u_0(l) = 0$ teljesül. Igazoljuk, hogy az

$$u : [0, l] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad (x, t) \mapsto \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k\pi c}{l} t\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \cdot \int_0^l u_0(\xi) \sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right) \mathrm{d}\,\xi$$

függvény megoldása az

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

(hullámterjedést leíró) differenciálegyenletnek a $[0, l] \times \mathbb{R}^+$ halmazon, és

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0$$

teljesül!