Kalkulus 2, 13. hét

Dirichlet-féle lokalizációs tétel alkalmazásai

I. Már korábban igazoltuk, a $[0, 2\pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{F}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó alábbi képleteket, ahol $a \in]0, 1[$.

1. $f(x) = x^2$ $\qquad \mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{4\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\cos kx - \frac{4\pi}{k}\sin kx$

2. $f(x) = \sin(ax)$ $\qquad \mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{\sin^2(\pi a)}{\pi a} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a\sin^2(\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}\cos kx + \frac{k\sin(2\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}\sin kx$

3. $f(x) = x^4$ $\qquad \mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{16\pi^4}{5} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 16\frac{2k^2\pi^2-3}{k^4}\cos kx - 16\frac{2k^2\pi^2-3}{k^4}\sin kx$

4. $f(x) = \dfrac{2\pi\,\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{2\pi a}-1}$ $\qquad \mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{1}{a} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2+k^2}\cos kx - \frac{2k}{a^2+k^2}\sin kx$

Most a Dirichlet-féle lokalizációs tétel segítségével mutassuk meg a fenti sorok felhasználásával az alábbiakat.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-a^2} = \frac{1-\pi a\,\mathrm{ctg}(\pi a)}{2a^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2} = \frac{\pi a\,\mathrm{cth}(\pi a)-1}{2a^2}$

II. Legyen $a \in]0, \pi[$ paraméter. Az alábbi $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ függvények Fourier-sorának a segítségével

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad |x| < a, \\ 0, & \text{ha} \quad |x| \geq a. \end{cases}$ $\qquad$ 2. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad |x| < a, \\ 0, & \text{ha} \quad |x| \geq a. \end{cases}$

igazoljuk, hogy minden $a \in]0, \pi[$ paraméter esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} = \frac{\pi-a}{2} \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2} = \frac{a\pi-a^2}{2}$$

teljesül.

(Vegyük észre, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin k}{k}\right)^2$ teljesül.)

Cesàro-összegzés

I. Cesàro-összegzés.

1^{A} . Igazoljuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} {}^{C_1} (-1)^n = \frac{1}{2}$, valamint $\sum_{n=0}^{\infty} {}^{C_2} (-1)^{n+1} n = \frac{1}{4}$.

2^{Gy} . Legyen $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olyan szám, melyre $|z| = 1$. Mutassuk meg, hogy az $a_n = z^n$ sorozatra

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{1}{1 - z} + \frac{z^{n+2} - z}{(n+1)(z-1)^2}$$

teljesül, valamint, hogy $\lim_{n \to \infty} \sigma_n^{(1)} = \frac{1}{1-z}$. Tehát $\sum_{n=0}^{\infty} {}^{C_1} z^n = \frac{1}{1-z}$. Mutassuk meg, hogy $x \in]0, 2\pi[$ esetén a $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x}$ helyettesítéssel

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}^{C_1} \cos(nx) = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} {}^{C_1} \sin(nx) = \frac{\sin x}{2(1 - \cos x)}$$

adódik.

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatból képzett $\sum a$ *sor* C_k *(Cesáro-) összegezhető*, valamely $k \in \mathbb{N}^+$ esetén, ha az $s(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k$ részletösszeg sorozatból képzett

$$\sigma^{(k)} : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \sigma_n^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} s_i, & \text{ha} \quad k = 1, \\ \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sigma_i^{(k-1)}, & \text{ha} \quad k > 1 \end{cases}$$

sorozatnak létezik véges határértéke, és ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} {}^{C_k} a_n = \lim_{n \to \infty} \sigma_n^{(k)}$ jelölést használjuk.