Kalkulus 2, 12. hét

Fourier-sor

I. Igazoljuk a $[-\pi,\pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{F}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket.

1. $f(x)=\pi-x$ $\qquad \mathcal{F}(f)(x)=\pi+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin kx}{k}$
2. $f(x)=|\sin x|$ $\qquad \mathcal{F}(f)(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$
3. $f(x)=\operatorname{sgn} x$ $\qquad \mathcal{F}(f)(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$
4. $f(x)=\pi-\frac{x^2}{\pi}$ $\qquad \mathcal{F}(f)(x)=\frac{2\pi}{3}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cos kx}{k^2}$

II. Igazoljuk a $[0,2\pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{F}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket, ahol $a\in\,]0,1[$.

1. $f(x)=x^2$ $\qquad \mathcal{F}(f)(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}\cos kx-\frac{4\pi}{k}\sin kx$
2. $f(x)=\sin(ax)$ $\qquad \mathcal{F}(f)(x)=\frac{\sin^2(\pi a)}{\pi a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a\sin^2(\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}\cos kx+\frac{k\sin(2\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}\sin kx$
3. $f(x)=x^4$ $\qquad \mathcal{F}(f)(x)=\frac{16\pi^4}{5}+\sum_{k=1}^{\infty}16\frac{2k^2\pi^2-3}{k^4}\cos kx-16\frac{2k^2\pi^2-3}{k^4}\sin kx$
4. $f(x)=\frac{2\pi\,\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{2\pi a}-1}$ $\qquad \mathcal{F}(f)(x)=\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2+k^2}\cos kx-\frac{2k}{a^2+k^2}\sin kx$

III. Határozzuk meg az alábbi $[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ függvények Fourier-sorát, ahol $a\in\,]0,\pi[$ paraméter.

1. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{ha } |x|<a,\\ 0, & \text{ha } |x|\ge a.\end{cases}$
2. $f(x)=\begin{cases}x, & \text{ha } |x|<a,\\ 0, & \text{ha } |x|\ge a.\end{cases}$
3. $f(x)=\begin{cases}\log\left|2\cos\frac{x}{2}\right|, & \text{ha } |x|<\pi,\\ 0, & \text{ha } |x|=\pi.\end{cases}$
4. $f(x)=\begin{cases}\int_0^x\log\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,\mathrm{d}\,t, & \text{ha } |x|<\pi,\\ 0, & \text{ha } |x|=\pi.\end{cases}$

IV. Tegyük fel, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus, és az

$$\mathcal{F}(f)(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

Fourier-sora egyenletesen konvergens.

1. Határozzuk meg az $f(-x)$ függvény Fourier sorát.
2. Ha az f függvény π szerint periodikus, akkor mit mondhatunk a Fourier-együtthatóiról?