Kalkulus 2, 11. hét

Mátrixfüggvények kiszámítása

I. Tekinstük az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixokat.

1. Határozzuk meg a mátrixok sajátértékei és sajátvektorait.
2. Írjuk fel a mátrixokat $S^{-1}JS$ alakban, ahol J Jordan-mátrix.
3. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x\pi)$, $g(x) = 2^x$ és $q = \log(2)$. Igazoljuk az alábbiakat.

$$f(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad f(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi^2 - 1 & -\pi^2 \\ 0 & \pi^2 & \pi^2 - 1 \end{pmatrix} \quad f(C) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 19 & 15 \\ 45 & 49 \end{pmatrix} \quad g(B) = 2 \begin{pmatrix} 1 & -2q & -2q \\ q & -q^2 + q + 1 & q(1-q) \\ -q & q(q-1) & q^2 - q + 1 \end{pmatrix} \quad g(C) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 10 & 7 & 7 \\ 7 & 10 & 7 \\ 7 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

II. Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

mátrixot.

1. Határozzuk meg a mátrix $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$, sajátértékeit és $(v_i)_{i=1,2,3}$ sajátvektorait.
2. Írjuk fel az A mátrixot
$$S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} S$$
alakban.
3. Határozzuk meg az A^{100} és az A^{-1} mátrixot.
4. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{40}\left(x^3 - 18x^2 + 72x\right)$, akkor
$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. Minden v_i $(i = 1, 2, 3)$ sajátvektorhoz határozzuk meg azt a P_i projekciót, mely az origón átmenő v_i irányvektorú egyenesre vetít merőlegesen.
6. Mutassuk meg, hogy
$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$
teljesül.

III. Tekintsük az alábbi mátrixokat.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -6 \\ 4 & -1 & -3 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Adjuk meg a mátrixok Jordan-alakját, valamint az eredeti bázist a mátrix kanonikus bázisába vivő leképezés mátrixát is!
2. Igazoljuk az alábbiakat.

$$\exp(A) = \mathrm{e} \begin{pmatrix} 9 & -4 & -11/2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix} \qquad \exp(B) = \mathrm{e}\, B \qquad \exp(C) = \begin{pmatrix} 3-3\,\mathrm{e} & \mathrm{e}-1 & 2\,\mathrm{e}-1 \\ 3-5\,\mathrm{e} & 2\,\mathrm{e}-1 & 3\,\mathrm{e}-1 \\ 3-4\,\mathrm{e} & \mathrm{e}-1 & 3\,\mathrm{e}-1 \end{pmatrix}$$