Kalkulus 2, 10. hét

Függvénysorozatok, függvénysorok és hatványsorok integrálása és deriválása

I. Igazoljuk, hogy

1. a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n9^n} x^n$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[-8, 9]$ halmazon;
2. a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n9^n} x^{2n}$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[-3, 3]$ halmazon.

II. Igazoljuk a függvénysorok deriváltjára kapott kifejezéseket!

1. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4 + x^2}$$
2. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\,\mathrm{e}^{-kx^2}\right) = -2x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,\mathrm{e}^{-kx^2}$$

III. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{arctg}(kx)}{2^{k-1}} \quad \text{és} \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1-x}{k}}{k+1}\ .$$

Legyen $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ és $g = \lim_{n\to\infty} g_n$. Határozzuk meg az $f'(0)$ és a $g'(1)$ értékét.

IV. Határozzuk meg az alábbi határértékeket.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{arctg} n^5x^2}{x+\sqrt{n}}\ \mathrm{d}\,x \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^{1} \frac{x^n}{\mathrm{e}^{nx}}\ \mathrm{d}\,x$$

V. Tekintsük a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ hatványsort.

1. Mutassuk meg, hogy a hatványsor egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ halmazon.
2. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. (Segítség: $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$.)
3. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi - \ln 4}{4}$.
   (Segítség: $\frac{\pi - \ln 4}{4} = \int_0^1 \arctan$.)

VI. Igazoljuk, hogy minden $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}.$$