

Kalkulus 2, 9. hét

Haladó példák egyenletes konvergenciára

I^H. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(A, \mathbb{R})$ olyan függvény, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat kvázিয়েnletesen konvergáljon¹ az A halmazon az $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ pontonkénti határfüggvényhez. Mutassuk meg, hogy ekkor $f \in C(A, \mathbb{R})$.

II^H. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(A, \mathbb{R})$ olyan függvény, hogy a $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ pontonkénti határfüggvényre $f \in C(A, \mathbb{R})$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat kvázিয়েnletesen konvergens az A halmazon.

III^H. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{ha } x \in]0, \frac{1}{n}]; \\ 2n - n^2 x & \text{ha } x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]; \\ 0 & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus]0, \frac{2}{n}]. \end{cases}$$

Határozzuk meg az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ függvénysorozat $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ határfüggvényét, valamint bizonyítsuk be, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ függvénysorozat nem egyenletesen konvergens, de kvázিয়েnletesen konvergens.

IV^A. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan monoton függvény, melyre a $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(a)|$ és a $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(b)|$ sor konvergens. Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ függvénysorozat abszolút- és egyenletesen konvergens.

V^H. Legyen $a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{a_n}{n^x}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $[0, \infty[$ halmazon.

VI*^H. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0, 1])$ halmazban haladó monoton függvények sorozata. Igazoljuk, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatból kiválasztható pontonként konvergens részsorozat.

VII^H. (*Dini-tétel.*) Legyen (M, d) kompakt metrikus tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan $C(M, \mathbb{R})$ halmazban haladó sorozat, amelyre minden $x \in M$ elemre $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) < \infty$ és minden $n \in \mathbb{N}$ elemre $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Igazoljuk, hogy ekkor az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens az M halmazon, és a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$

Gy : Gyakorló feladat; A : Alapfeladat; H : Haladó feladat.

¹Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat kvázিয়েnletesen konvergens az A halmazon, ha létezik az $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ pontonkénti határfüggvény az A halmazon, és minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $N \in \mathbb{N}$ esetén létezik véges sok $N < n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $x \in A$ elemre valamely $n_i \in \{n_1, \dots, n_k\}$ számra $|f(x) - f_{n_i}(x)| < \varepsilon$ teljesül. Vagyis az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat kvázিয়েnletesen konvergens az A halmazon, ha az $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ függvényre

$$(A \subseteq \text{Dom } f) \wedge ((\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(\exists \varphi : k \rightarrow \mathbb{N} \cap]N, \infty[)(\forall x \in A)(\exists i \in k)(|f(x) - f_{\varphi(i)}(x)| < \varepsilon))$$

teljesül.

határfüggvény akkor és csak akkor folytonos, ha az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az M halmazon.

VIII^H. Mutassuk meg, hogy a $(C^b(\mathbb{R}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ térben $\overline{C_0}(\mathbb{R}, \mathbb{K})^1$ megegyezik a végtelenben eltűnő² folytonos $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ függvények halmazával.

IX^A. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a \mathbb{Q} halmazon, akkor egyenletesen konvergens az egész \mathbb{R} halmazon is.

X^A. Legyen $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{x+k}{n+1}\right).$$

Határozzuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ pontokénti határfüggvényt és mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál a pontokénti határfüggvényhez.

XI^{Gy}. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(I, \mathbb{R})$ olyan, melyre a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az I halmazon. Igazoljuk, hogy ekkor az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

XII^{**H}. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(I, \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens a I halmazon, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysorozat minden átrendezettjére egyenletesen konvergens a I halmazon.

XIII^H. Mutassuk meg, hogy minden $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$\int_0^1 x^n \log^k x \, dx = (-1)^k \frac{k!}{(1+n)^{1+k}}$$

teljesül, vagyis speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_0^1 (-x \log x)^n \, dx = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Majd ezek alapján igazoljuk, hogy

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

teljesül.

¹ $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{K}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \mid \text{supp } f \text{ kompakt halmaz}\}$, ahol $\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$.

²Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ függvény végtelenben eltűnő, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz, hogy minden $x \in (\mathbb{R} \setminus K)$ elemre $|f(x)| < \varepsilon$.