

## Kalkulus 2, 9. hét

### Függvénysorozatok és függvénysorok egyenletes konvergenciája

I. Határozzuk meg az alábbi függvénysorozatok konvergenciatartományát és határfüggvényét.

$$\begin{array}{ll} 1. & f_n(x) = \log^n x \\ 2. & f_n(x) = n \sin \frac{x}{n} \\ 3. & f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}} \\ 4. & f_n(x) = n \left( x^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \end{array}$$

II. Határozzuk meg az alábbi  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  függvénysorozat  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  határfüggvényét, valamint döntsük el, hogy az  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  függvénysorozat egyenletesen konvergál-e az  $f$  határfüggvényhez a  $\text{Dom } f$  halmazon.

$$\begin{array}{lll} 1. & f_n(x) = \frac{1}{x^n} & 2. & f_n(x) = \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} & 3. & f_n(x) = \frac{2x^{2n}}{1+x^{4n}} \\ 4. & f_n(x) = \frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1} & 5. & f_n(x) = n \log \left( 1 + \frac{x}{n} \right) & 6. & f_n(x) = \frac{1}{(x+n)^2} \\ 7. & f_n(x) = \sin^n x & 8. & f_n(x) = n \sin \frac{x}{n} & 9. & f_n(x) = \frac{2}{\pi} \arctg nx \\ 10. & f_n(x) = x^n - x^{n+1} & 11. & f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} & 12. & f_n(x) = x e^{-nx} \end{array}$$

III. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorozatok egyenletesen konvergensek-e az adott intervallumon.

$$\begin{array}{ll} 1. & f_n(x) = e^{-nx} & I_1 = [0, \infty[ & I_2 = [a, \infty[ \\ 2. & f_n(x) = x e^{-nx} & I = [0, \infty[ \end{array}$$

IV. Határozzuk meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát.

$$\begin{array}{lll} 1. & \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^n & 2. & \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}} & 3. & \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\ln x}{(x+n)(x+n+1)} \\ 4. & \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\cos nx}{n^4 + x^2} & 5. & \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{1+x^{2n}} & 6. & \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^x} \end{array}$$

V. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a konvergenciatartományon.

$$\begin{array}{lll} 1. & \sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx} & 2. & \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{n} \right)^n & 3. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx} \\ 4. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}} & 5. & \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{2x}{x^2 + n^2} & 6. & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{x}{n} + n\pi \right) \end{array}$$