Kalkulus 2, 8. hét

Fizikai alkalmazások

I. Tegyük fel, hogy a Föld egy végtelen kiterjedésű d vastagságú korong, melynek sűrűsége $\rho = 5500$ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Mekkora d esetén tapasztaljuk közel a Földhöz az $a = 9,81$ $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gravitációs gyorsulást?

Útmutatás: A korong legyen a

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid h \leq z \leq h + d\right\}$$

tartomány, és az m tömegű test legyen az origóban. Ekkor a testre ható gravitációs gyorsulás

$$ma = \int_h^{h+d} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{Gm\rho r z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,z = 2\pi d G m \rho.$$

Vagyis

$$d = \frac{a}{2\pi\rho G} \approx 4256 \text{ km}.$$

II. Tegyük fel, hogy egy $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömb, melynek sűrűsége a középpontjától $r \in [0, R]$ távolságra $\rho(r)$, ahol $\rho \in C([0, R], \mathbb{R}^+)$. Mekkora a gravitációs gyorsulás a gömb felszínétől $h \in \left]-R, \infty\right[$ távolságban (ahol a negatív távolság azt jelenti, hogy a gömb belsejében van a test)?

Útmutatás: Olyan koordinátázást választunk, melyben az integrálási határok egyszerűbbek, viszont ilyenkor az integrálandó függvények bonyolultabbak. A gömb középpontja legyen az origóban, és az m tömegű test legyen a $(0, 0, R + h)$ pontban. Ekkor a testre ható gravitációs gyorsulás (gömbi koordinátarendszerben)

$$ma = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \int_0^{\pi} Gm\rho(r) \frac{r^2 \sin\vartheta (R + h - r\cos\vartheta)}{\left(r^2 \sin^2\vartheta + (R + h - r\cos\vartheta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\,\vartheta \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\varphi.$$

Az

$$\int \frac{\sin\vartheta (a - \cos\vartheta)}{\left(\sin^2\vartheta + (a - \cos\vartheta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}\,\vartheta = \frac{1 - a\cos\vartheta}{a^2\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\vartheta}} + C$$

integrál felhasználásával

$$ma = \frac{Gm}{(R + h)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \rho(r) r^2 \left(1 + \operatorname{sgn}\left(\frac{R + h}{r} - 1\right)\right) \mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\varphi$$

adódik.

A $h \geq 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{G}{(R + h)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \int_0^{\pi} \rho(r) r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\,\vartheta \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\varphi,$$

ami másképp kifejezve

$$a = \frac{GM}{(R + h)^2},$$

ahol M a gömb össztömege. Tehát ekkor is ugyanakkora a gravitációs gyorsulás, mintha a gömb összes tömege a középpontjában lenne.

A $-R < h < 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{G}{(R+h)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R+h} \int_0^{\pi} \rho(r) r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\,\vartheta \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\varphi,$$

ami másképp kifejezve

$$a = \frac{GM_h}{(R+h)^2},$$

ahol M_h a test alatt lévő gömb össztömege. Tehát ebben az esetben nem számít, hogy a test felett még mekkora gömbhéj található.

III. Tegyük fel, hogy a kétdimenziós térben egymástól r távolságra lévő m_1 és m_2 tömegű pontszerű testek közötti gravitációs erő

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{r}.$$

A kétdimenziós térben legyen egy $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú körlap sűrűsége a középpontjától $r \in [0, R]$ távolságra $\rho(r)$, ahol $\rho \in C([0,R], \mathbb{R}^+)$. Mekkora a gravitációs gyorsulás a körlap szélétől $h \in \left]-R, \infty\right[$ távolságban (ahol a negatív távolság azt jelenti, hogy a körlap belsejében van a test)?

Útmutatás: A $h \geq 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{GM}{R+h},$$

ahol M a körlap össztömege. Tehát ekkor is ugyanakkora a gravitációs gyorsulás, mintha a körlap összes tömege a középpontjában lenne.

A $-R < h < 0$ esetben azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{GM_h}{R+h},$$

ahol M_h a próbatest alatt lévő körlap össztömege.

IV. Tekintsünk a háromdimenziós térben egy $\rho \in \mathbb{R}^+$ sűrűségű $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad z \geq 0$$

félgömböt. Hol nagyobb a gravitációs gyorsulás, a $(0,0,0)$ vagy a $(0,0,R)$ pontban?

Útmutatás: A $(0,0,0)$ pontban a gravtiációs gyorsulás legyen a_1, a $(0,0,R)$ pontban pedig a_2. Az első esetben legyen a

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0\right\}$$

halmaz a félgömb. Ekkor az origóban lévő m tömegű testre ható gravitációs erő

$$ma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R} \int_0^{2\pi} Gm\rho \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\vartheta = \pi G m \rho R,$$

vagyis a gravitációs gyorsulás a $(0,0,0)$ pontban

$$a_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{GM}{R^2},$$

ahol M a félgömb össztömege.

A második esetben legyen a

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2,\ z \leq R\right\}$$

halmaz a félgömb. Ekkor az origóban lévő m tömegű testre ható gravitációs erő

$$ma = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\frac{R}{\cos\vartheta}} \int\limits_0^{2\pi} Gm\rho \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\vartheta + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2R\cos\vartheta} \int\limits_0^{2\pi} Gm\rho \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\vartheta = 2\pi Gm\rho R \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right),$$

vagyis a gravitációs gyorsulás a $(0,0,0)$ pontban

$$a_2 = (3 - \sqrt{2}) \cdot \frac{GM}{R^2}.$$

Tehát $a_2 > a_1$.

V. Mekkora szögsebességgel kell forognia a kétdimenziós térben egy $\rho \in \mathbb{R}^+$ vonalsűrűségű R sugarú körnek ahhoz, hogy alakja ne változzon a saját gravitációs tere miatt?

Útmutatás: A körív legyen a

$$V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\right\}$$

halmaz. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora a gravitációs gyorsulása az $(R,0,0)$ pontban. Az egyensúly feltétele

$$mR\omega^2 = 2\int\limits_0^{\pi} \frac{Gm\rho}{2} \,\mathrm{d}\,\varphi = \pi Gm\rho,$$

vagyis

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi G\rho}{R}}\ .$$

VI. Az $M \in \mathbb{R}^+$ tömegű homogén (egyenletes sűrűségű) test *tehetetlenségi nyomatékát* egy rögzített tengely körül a

$$\Theta = \rho \cdot \iiint_V f(x,y,z) \,\mathrm{d}\,V$$

kifejezés adja, ahol ρ a test sűrűsége ($\rho = \frac{M}{V}$) és $f(x,y,z)$ a test (x,y,z) koordinátájú pontjának a forgástengelytől vett távolságának a négyzete. Igazoljuk, hogy

1. az M tömegű R sugarú gömbnél a középponton átmenő tengely esetén

$$\Theta = \frac{2}{5}MR^2$$

és a gömböt érintő tengely esetén

$$\Theta = \frac{7}{5}MR^2;$$

2. az M tömegű h magasságú R alapsugarú egyenes kúpnál a kúp szimmetriatengelye mentén fekvő forgástengely esetén

$$\Theta = \frac{3}{10}MR^2$$

a kúp csúcsán átmenő tengely esetén

$$\Theta = \frac{3}{5}M\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right)$$

a kúp egy alkotóegyenese mint tengely esetén

$$\Theta = \frac{3}{20}M\frac{R^2}{R^2+h^2}\left(R^2 + 6h^2\right).$$